Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Normierte Räume, Hilberträume, Fourierreihen

1.1 Metrische Räume

Beispiel 1.1.1 Man wähle in der kartesischen Ebene einen festen Punkt x_0, nenne ihn „Paris“ und definiere den Abstand $d(x,y)$ zwischen den Punkten x und y folgendermaßen: $d(x,y)$ sei der euklidische Abstand zwischen x und y, falls beide Punkte auf einer Geraden durch x_0 liegen, andernfalls sei $d(x,y)$ die Summe der euklidischen Abstände zwischen x, x_0 und x_0, y. Zeigen Sie, daß hierdurch eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ erklärt wird, „Metrik des französischen Eisenbahnsystems“.

Beispiel 1.1.2 Sei $d(x,y)$ eine Metrik im $\mathbb{R}^n$. Die Menge

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x,x_0) < \varepsilon\}$$

heißt die offene „Kugel“ mit Radius ε um x_0. Zeichnen Sie die Kugeln

$$U_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right), \quad U_{\frac{1}{2}}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right), \quad U_2\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$$

für die Metriken

1. $d_2(x,y)$, der euklidische Abstand von $x, y \in \mathbb{R}^2$,
2. $d_1(x,y) := |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|, \quad x, y \in \mathbb{R}^2$, Betragssummen–Metrik,

3.
$$d_d(x,y) := \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases} \quad \text{die diskrete Metrik auf } \mathbb{R}^2,$$

4. $d_f(x,y)$, die Metrik aus Beispiel 1.1.1 mit $x_0 := \binom{0}{0}$.

Überprüfen Sie, ob man die diskrete Metrik (3) zur Definition einer Norm benützen kann,

$$\|x-y\| := d_d(x,y) \qquad \text{bzw.} \qquad \|x\| := d_d(x,0).$$

Beispiel 1.1.3 Betrachten Sie die metrischen Räume von Folgen reeller Zahlen

$$l^\infty := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots);\ \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\}$$

mit der Metrik

1. $d_\infty(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k - x_k|$,
2. $d'(x,y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y_k - x_k|}{k!}$.

Sei $e_n \in l^\infty$ die Folge der Form $(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, wobei die „1“ an der n–ten Stelle sei. Untersuchen Sie die Folgen $\{\frac{1}{n}e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{n!e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz in (l^∞, d_∞) bzw. (l^∞, d').

Beispiel 1.1.4 Seien $x := (x_1,\ldots,x_n)^\top$, $y := (y_1,\ldots,y_n)^\top$ Punkte des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß durch

$$d_\infty(x,y) := \max(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|)$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

Beispiel 1.1.5 Zwei Metriken heißen äquivalent, wenn jede Kugel bezüglich der einen Metrik eine Kugel bezüglich der anderen Metrik enthält. Sei $d(x,y)$ eine Metrik. Zeigen Sie, daß dann

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

eine äquivalente Metrik zu $d(x,y)$ ist.

Bemerkung: $d'(x,y)$ ist beschränkt.

Beispiel 1.1.6 Untersuchen Sie (beweisen Sie oder geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an):

(a) $Rd(Rd\,A) = Rd\,A$, $\quad Rd\,A$ bezeichnet die Menge aller Randpunkte von A. Ein *Randpunkt* ist ein Berührungspunkt, der kein innerer Punkt ist. Ein *innerer Punkt* ist ein Punkt, der eine offene Umgebung besitzt, die ganz in A liegt.

(b) $Rd(\overline{A}) = \overline{Rd\,A} = Rd\,A$.

(c) $\overline{(A^o)} = (\overline{A})^o$, $\quad A^o$ ist die Menge aller inneren Punkte von A und wird als der *offene Kern* bezeichnet.

Hinweis: Die Aussagen in (a) und (c) sind falsch! Haben Sie keine andere Idee, so betrachten Sie als Gegenbeispiel die Menge $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Beispiel 1.1.7 Es sei $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger stetiger Funktionen mit $f_n : [\,0,1\,] \to \mathbb{R}$.
Beweisen Sie: Konvergiert $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion f, dann ist f stetig.

Beispiel 1.1.8 Es sei $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger stetiger und stetig differenzierbarer Funktionen mit $f_n : [\,0,1\,] \to \mathbb{R}$.
Beweisen Sie: Konvergiert die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion f und die Folge $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion g, dann ist f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = g(x).$$

1.2 Banachräume, L^p-Räume

Beispiel 1.2.1 Im $\mathbb{R}^n$ finden die folgenden Normen am häufigsten Anwendung:

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i|, && \text{Betragssummen–Norm,} \\
\|x\|_2 &:= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, && \text{euklidische Norm,} \\
\|x\|_\infty &:= \max_{1\le i\le n} |x_i|, && \text{Maximum–Norm.}
\end{aligned}$$

Skizzieren Sie für die Dimensionen $n = 2$ und $n = 3$ die Mengen

$$S_\varrho := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_\varrho \leq 1\}, \quad \varrho = 1, 2, \infty,$$

die sogenannten „Einheitssphären“ im entsprechend normierten Raum $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 1.2.2 Im $\mathbb{R}^n$ gilt der folgende Satz:

Satz: *Alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h., für jedes Paar von Normen $\mu(x)$ und $\nu(x)$ gibt es positive Konstanten m und M, sodaß*

$$m\,\mu(x) \leq \nu(x) \leq M\,\mu(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

Vergleichen Sie die Normen aus Beispiel 1.2.1, d.h., berechnen Sie für jedes Paar optimale Konstanten m und M im Sinne des obigen Satzes.

Beispiel 1.2.3 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, aus $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ und ihre Abbildungsnorm ist definiert als das maximale Streckungsverhältnis $||Ax||/||x||$:

$$\varrho = 1, 2, \infty \ : \qquad ||A||_\varrho := \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_\varrho}{||x||_\varrho} = \max_{||x||_\varrho = 1} ||Ax||_\varrho.$$

Da $||\cdot||_\varrho$ eine stetige Funktion ist,

$$||\cdot||_\varrho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

und die Einheitsspäre $S_\varrho = \{x \in \mathbb{R}^m;\ ||x||_\varrho = 1\}$ ein kompakter Teilraum des $\mathbb{R}^m$, wird das Maximum in (1.1) wirklich angenommen, d.h., es gibt ein $x^0 \in \mathbb{R}^m$ mit $||x^0||_\varrho = 1$, sodaß $||Ax^0||_\varrho = ||A||_\varrho$.

(a) Gegeben sei die Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie $||A||_\varrho$, $\varrho = 1, 2, \infty$, auf folgende Weise:

(i) Zeichnen Sie im $\mathbb{R}^2$ das Bild der Einheitssphäre $A(S_\varrho)$, $\varrho = 1, 2, \infty$.

(ii) Finden Sie die kleinste „Kugel“ (bezüglich der entsprechenden Norm) die das Bild $A(S_\varrho)$ ganz enthält. Ihr „Radius“ ist $||A||_\varrho$.

(b) Zeigen Sie: $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$||A||_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{1.1}$$

Hinweis: Zeigen Sie:

1. $\|A\|_\infty = \max_{||x||_\infty = 1} ||Ax||_\infty \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,
2. $\exists\, x^0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \|A\|_\infty = ||Ax^0||_\infty$.

Beispiel 1.2.4 Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Eine Menge $M \subseteq X$ heißt *konvex*, falls

$$x_1, x_2 \in M \Rightarrow (1-t)x_1 + tx_2 \in M, \quad \forall\, t \in [0,1]$$

gilt. Zeigen Sie, daß die Einheitskugel $S := \{x \in X;\ ||x|| \le 1\}$ konvex ist.

Beispiel 1.2.5 (a) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ auf Konvergenz in $(L^2([0,1]), \|\cdot\|_{L^2})$.

(b) Es sei

$$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{e^{-\frac{x}{n}}\right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Zeigen Sie, daß $f_n \in L^1([0,\infty))$ gilt und untersuchen Sie die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz in $(L^1([0,\infty)), \|\cdot\|_{L^1})$.

Beispiel 1.2.6 Wir betrachten die normierten Räume

$$(C[a,b], \|\cdot\|_\infty), \quad \|f\|_\infty = \max_{a \le t \le b} |f(t)|,$$

$$(C[a,b], \|\cdot\|_{L^1}), \quad \|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)| dx,$$

wobei $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f \text{ stetig}\}$ ist.

Für die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $[a,b] = [-2,2]$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) := \begin{cases} -1, & x \le -\frac{1}{n}, \\ nx, & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1, & x \ge \frac{1}{n}, \end{cases}$$

zeigen Sie, daß diese Folge

(a) eine Cauchy–Folge bezüglich $||\cdot||_1$ aber

(b) keine Cauchy–Folge bezüglich $||\cdot||_\infty$ ist.

Beispiel 1.2.7 Ist die Folge $\{x_n\}$, definiert durch

$$x_n(t) := \begin{cases} n(1-n|t|) & \text{für } |t| \le 1/n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Cauchyfolge in $L^1(-1,1)$?

Beispiel 1.2.8 Man zeige, daß durch $x_n = (t+1/n)^{-1/2}$ eine Cauchyfolge in $L^p(0,1)$ für $1 \le p < 2$ definiert ist.

Beispiel 1.2.9 Betrachten Sie den normierten Raum $(X, ||\cdot||_\infty)$, wobei

$$X := \{f; f \in C[0,1], f(0) = 0\}.$$

Beweisen Sie, daß $(X, ||\cdot||_\infty)$ ein Banachraum ist.

Hinweis: In X sind die Vektoraddition und Skalarmultiplikation wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f_1, f_2 \in X \quad &\Rightarrow \quad (f_1+f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x), \quad \forall x \in [0,1], \\ f \in X,\, \alpha \in \mathbb{R} \quad &\Rightarrow \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad \forall x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Beispiel 1.2.10 Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein Banachraum. M sei ein abgeschlossener linearer Unterraum von X.

Beweisen Sie, daß $(M, ||\cdot||)$ ein Banachraum ist.

Beispiel 1.2.11 Prüfen Sie, ob

$$\begin{aligned} (1) \qquad ||f|| &:= \max_{a \le x \le b} |f'(x)|, \\ (2) \qquad ||f|| &:= \max_{a \le x \le b} \{|f(x)| + |f'(x)|\}, \end{aligned}$$

eine Norm in $C^1[\,0,1\,]$ definiert,

$$C^1[0,1] = \{f:\ [0,1] \to \mathbb{R};\ f \text{ einmal stetig differenzierbar}\}.$$

Beispiel 1.2.12 Sei $C^1[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f$ einmal stetig differenzierbar$\}$. Sei

$$||f||_{1,\infty} := ||f||_\infty + ||f'||_\infty.$$

(a) Untersuchen Sie, ob $(C^1[a,b], ||\cdot||_{1,\infty})$ ein Banachraum ist.

(b) Beim „Schrödinger“ wird die Frage diskutiert, ob $(C^1[a,b], ||\cdot||_\infty)$ ein Banachraum ist. Sic! Willi sagt: „Ha! Ich habe ein Gegenbeispiel! Betrachte die Folge

$$f_n(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

von Funktionen in $C^1[a,b]$, die gegen

$$f^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x \in [a,b), \\ 1, & \text{falls} \quad x = b, \end{cases}$$

konvergiert. Da $f^*(x) \notin C^1[a,b]$, ist der Raum kein Banachraum.“ Maja denkt kurz nach und sagt: „Falsch! Dein Beispiel beweist garnichts.“ Wer hat recht, Willi oder Maja? [1]

Beispiel 1.2.13 Sei $f \in C[0,1]$ und $|\varrho| < 1$. Mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes zeige man, daß die Integralgleichung

$$x(t) = f(t) + \varrho \int_0^1 \sin(t + x(s))\, ds$$

eine eindeutige Lösung $x \in C[0,1]$ besitzt.

Beispiel 1.2.14 Sei $(B, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $b \in B$ und $K : B \to B$ eine lineare Abbildung mit

$$\|K\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Kx\| < 1.$$

Man zeige, daß die Gleichung $x = Kx + b$ eine eindeutige Lösung hat, die durch die *Neumannreihe*

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} K^j b$$

gegeben ist.

[1] Jede Ähnlichkeit der hier auftretenden Personen mit den Filmhelden aus der Insektenwelt ist weder zufällig noch unbeabsichtigt.

Beispiel 1.2.15 Sei $t_0 \in [a,b]$. Dann ist die Abbildung $f : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := x'(t_0), \qquad \forall x \in C^1[a,b].$$

Man zeige, daß f ein stetiges, lineares Funktional ist.

Beispiel 1.2.16 Man zeige, daß die Abbildung

$$f(x) := \int_a^b x(t)\,dt, \qquad \forall x \in C[a,b]$$

ein stetiges, lineares Funktional auf $C[a,b]$ ist.

Beispiel 1.2.17 Gegeben sind zwei normierte Vektorräume $(V, ||\cdot||_V)$ und $(U, ||\cdot||_U)$. Eine Abbildung

$$\varphi : V \to U$$

von V nach U heißt stetig in v, falls gilt: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon, v)$ mit

$$||\varphi(v) - \varphi(w)||_U \le \varepsilon, \quad \text{für jedes } w, \text{ das } \quad ||v-w||_V \le \delta \quad \text{erfüllt.}$$

Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung L von V nach U, d.h., eine Abbildung mit

$$\begin{aligned} L(v_1 + v_2) &= L(v_1) + L(v_2), \quad \forall\, v_1, v_2 \in V, \\ L(\lambda v) &= \lambda L(v), \quad \forall\, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist, d.h., falls eine Konstante $M > 0$ existiert, sodaß gilt

$$\|L(v)\|_U \le M \|v\|_V, \quad \forall\, v \in V.$$

Die kleinstmögliche dieser Konstanten M heißt die Norm der linearen Abbildung L. Zeigen Sie, daß diese Norm gleich

$$||L||_{B(V,U)} := \sup_{||v||_V = 1} ||L(v)||_U$$

ist (vgl. Beispiel 1.2.3).

Beispiel 1.2.18 Ist die lineare Abbildung D von $(C^1[a,b], ||\cdot||_\infty)$ nach $(C[a,b], ||\cdot||_\infty)$,

$$D(f) := \frac{d}{dx} f$$

stetig? Wenn ja bestimmen Sie ihre Norm. Untersuchen sie dieselbe Frage für D als Abbildung von $(C^1[a,b], ||\cdot||_{1,\infty})$ nach $(C[a,b], ||\cdot||_\infty)$.

1.3 Hilberträume

Beispiel 1.3.1 Untersuchen Sie, ob (u,v) ein inneres Produkt in $\mathbb{C}^3$ definiert:

(1) $\quad (u,v) := 7u_1\overline{v}_1 + 3u_2\overline{v}_2 + 4u_3\overline{v}_3,$

(2) $\quad (u,v) := \frac{1}{2}u_1\overline{v}_1 + 2u_2\overline{v}_2 + 3u_3\overline{v}_3 + 25u_1\overline{v}_3,$

(3) $\quad (u,v) := u_1\overline{v}_1 + u_2\overline{v}_2 + u_3\overline{v}_3.$

Beispiel 1.3.2 Untersuchen Sie, ob durch

$$(x,y) := x^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} y, \quad x,y \in \mathbb{R}^3$$

ein inneres Produkt definiert ist.

Beispiel 1.3.3

1. Man zeige, daß durch

$$(x,y) := 3x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$$

ein inneres Produkt auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert ist.

2. Man bestimme eine Basis von $\{(1,0,0)\}^\perp$ in $(\mathbb{R}^3, (\cdot,\cdot))$.

Beispiel 1.3.4 Auf dem Intervall $[0,\infty)$ sei durch $\omega(x) := \exp(-x)$ eine Gewichtsfunktion gegeben und es gelte

$$L_{[0,\infty)} := \left\{ f : \ f \ \text{ stetig und } \int\limits_0^\infty \exp(-x)|f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Durch

$$(f,g) := \int\limits_0^\infty \omega(x)f(x)g(x)dx; \qquad (f,g) \in \mathbb{R}$$

ist ein inneres Produkt definiert.

(b) Die Summe zweier Funktionen aus $L_{[0,\infty)}$ ist wieder eine Funktion aus $L_{[0,\infty)}$ (*Hinweis:* Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung).

Beispiel 1.3.5 Sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein innerer Produktraum. Zeigen Sie, daß das Skalarprodukt folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $(u, \alpha v) = \overline{\alpha}(u, v), \quad \forall u, v \in V, \quad \alpha \in \mathbb{C},$
2. $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2), \quad \forall u, v_1, v_2 \in V,$
3. $||u|| := \sqrt{(u, u)}$ definiert eine Norm.

Beispiel 1.3.6 Es sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum und $M \subseteq V$. Zeigen Sie, daß

$$M^{\perp} := \{y \in V;\ (y, x) = 0, \quad \forall\, x \in M\}$$

ein linearer Unterraum von V ist.

Beispiel 1.3.7 Beweisen Sie, daß in einem Raum V mit innerem Produkt stets gilt:

1. Parallelogrammregel

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x, y \in V,$$

2. die Gleichung von Apollonius

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\|z - \frac{1}{2}(x + y)\|^2, \quad x, y, z \in V.$$

Beispiel 1.3.8 Beweisen Sie die folenden Aussagen:

1. In einem Raum V mit innerem Produkt gilt

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad ||x + \alpha y|| \geq ||x||, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}.$$

2. In einem Raum V mit innerem Produkt gilt

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad ||x + \alpha y|| = ||x - \alpha y||, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Beispiel 1.3.9 Es sei M ein linearer Unterraum des Hilbertraumes V. Zeigen Sie, daß die orthogonalen Projektionen $P : V \to M,\ Q : V \to M^{\perp}$ idempotent sind, d.h.,

$$P^2 = P, \qquad Q^2 = Q,$$

gilt. Zeigen Sie weiters

$$Q = I - P.$$

Beispiel 1.3.10 Seien x und y Elemente eines Hilbertraumes H über $\mathbb{R}$ und sei

$$D = \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix}$$

die Gram'sche Determinante, wobei $(x,y) \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in H$.

(a) Zeigen Sie, daß x und y genau dann linear abhängig sind, wenn die Gram'sche Determinante verschwindet, d.h., $D = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, daß $\|x\| \cdot \|y\| = |(x,y)|$ genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

Beispiel 1.3.11 Zeigen Sie, daß der Raum l^2 aller unendlichen Folgen

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

ein Hilbertraum ist.

Beispiel 1.3.12 Der Unterraum M von l^2 sei aufgespannt von den Folgen $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ und $\{0, 0, 1, 0, 0, \ldots\}$. Man bestimme die orthogonale Projektion der Folge $\{1, -1/2, 1/3, -1/4, \ldots\}$ auf M.

Hinweis: Die zu berechnenden Summen von Reihen kann man im Theorieskriptum finden.

Beispiel 1.3.13 Man will eine stetige reellwertige Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ durch eine konstante Funktion c ersetzen (approximieren).

(a) Wie muß man c wählen, damit der absolute Fehler bezüglich der L^2–Norm

$$\|f - c\|_{L^2}^2 = \int_a^b (f(x) - c)^2 dx$$

minimal wird?

(b) Die gleiche Frage für die Maximum–Norm

$$\|f - c\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) - c|.$$

(c) Lösen Sie (a) und (b) für

$$f(x) = e^x \qquad \text{und} \qquad [a, b] = [0, 1].$$

Beispiel 1.3.14 Gegeben sei das System $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$. Orthonormieren Sie die ersten drei Funktionen dieses Systems bezüglich des Skalarproduktes

$$(f, g) := \int_0^\infty e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, d\mu.$$

Beispiel 1.3.15 Das Polynomsystem $\{1,\ x\}$ läßt sich mit Hilfe des Orthogonalisierungsverfahrens von Gram–Schmidt bezüglich der Gewichtsfunktion $\omega(x) \equiv 1$ auf dem Intervall $[0, 1]$ orthonormieren.

Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Orthonormalsystems die Koeffizienten α und β so, daß

$$\int_0^1 \Big(e^x - (\alpha x + \beta)\Big)^2\, dx$$

minimal wird.

1.4 Fourierreihen im Raum $L^2(a, b)$

Beispiel 1.4.1 (a) Berechnen Sie die Fourierreihe der Rechtecksschwingung. Sie ist definiert als die 2π–periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi,\ 0,\ \pi. \end{cases}$$

(b) Untersuchen Sie diese Reihe auf

(i) punktweise Konvergenz,

(ii) gleichmäßige Konvergenz,

(iii) Konvergenz im Quadratmittel.

Beispiel 1.4.2 Verwenden Sie die Parseval'sche Gleichung und die Lösung des Beispiels 1.4.1, um die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

zu berechnen.

Beispiel 1.4.3 (a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x$, $0 < x < 2$, in eine Sinus–Reihe, indem Sie sie zu einer ungeraden Funktion mit der Periode 4 erweitern, vgl. Abb. 1.1.

Abbildung 1.1: Funktion $f(x),\ 0 < x < 2$, ungerade fortgesetzt

(b) Entwickeln Sie die Funktin $f(x) = x$, $0 < x < 2$, in eine Cosinus–Reihe, indem Sie sie zu einer geraden Funktion mit der Periode 4 erweitern, vgl. Abb. 1.2.

Beispiel 1.4.4 Die Funktion $f(x) = x$, $0 < x < 2$, läßt sich sowohl in eine Sinus–Reihe, vgl. Beispiel 1.4.3(a),

$$f_1(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$$

als auch in eine Cosinus–Reihe, vgl. Beispiel 1.4.3(b),

$$f_2(x) \sim 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

Abbildung 1.2: Funktion $f(x),\ 0 < x < 2$, gerade fortgesetzt

entwickeln, indem man sie entweder zur ungeraden oder zur geraden Funktion mit der Periode 4 erweitert.

(a) Welche der beiden Reihen darf man gliedweise differenzieren?

(b) Führen Sie diese Differentiation durch und zeigen Sie damit, daß

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad 0 < x < 2$$

gilt.

(c) Geben Sie die Fourierreihe für $f(x) = x^2$, $0 < x < 2$, an, indem Sie die Reihe $f_1(x)$ integrieren.

(d) Benützen Sie das obige Ergebnis, um die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

zu summieren.

Beispiel 1.4.5 (a) Geben Sie die Parseval'sche Gleichung an, die zur Reihe $f_2(x)$ gehört.

(b) Bestimmen Sie mit dem obigen Ergebnis die Summe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Beispiel 1.4.6 Berechnen Sie die trigonometrische Fourierreihe von

$$f(x) = e^x \quad \text{in} \quad [-\pi, \pi].$$

Beispiel 1.4.7 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ periodisch fortgesetzt. Entwickeln Sie $f(x)$ in eine trigonometrische Fourierreihe:

$$f(x) = x^2, \qquad x \in [0, 2\pi).$$

Untersuchen Sie die Reihe auf

(i) Konvergenz im Quadratmittel,

(ii) punktweise Konvergenz,

(iii) gleichmäßige Konvergenz.

Beispiel 1.4.8 Wie im Beispiel 1.4.7, jedoch mit

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & -\pi < x < 0, \\ \frac{c_1+c_2}{2}, & x = -\pi, 0, \pi, \\ c_2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Beispiel 1.4.9 Entwickeln Sie $f(x) = |\sin x|$ von $[0, 2\pi)$ auf $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt in eine trigonometrische Fourierreihe. Untersuchen Sie diese auf Konvergenz.

Beispiel 1.4.10 Entwickeln Sie die Funktion $f(x) \in L^2([-1,1])$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}(1+x), & -1 \le x < 0 \\ \frac{\pi}{2}(1-x), & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

in ihre trigonometrische Fourierreihe. Zeichnen Sie die ersten drei sich so ergebenden Approximationen für $f(x)$.

Beispiel 1.4.11 Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega \notin \mathbb{Z}$) über dem Intervall $x \in [-\pi, \pi]$ in ihre trigonometrische Fourierreihe. Wie spiegelt sich die abnehmende Glattheit von f für wachsendes $|\omega|$ im Verhalten der Fourierkoeffizienten wider? Vergleichen Sie dazu auch die Aussage von Beispiel 1.4.15 und kommentieren Sie den Zusammenhang mit dem vorliegenden Beispiel.

Beispiel 1.4.12 Gegeben sei die Funktion $\varphi(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \neq 0$, $t \in (0, \pi)$. Indem man sich $\varphi(t)$ zu einer geraden bzw. ungeraden 2π–periodischen Funktion fortgesetzt denkt, kann man für $\varphi(t)$, $t \in (0, \pi)$ eine reine Cosinus– bzw. eine reine Sinus–Fourierentwicklung herleiten. Geben Sie diese beiden Fourierreihen an. Welche der beiden Reihen konvergiert schneller?

Beispiel 1.4.13 Entwickeln Sie die Funktion $f(x) \in L^2([-\pi, \pi])$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x, & x < 0, \\ \cos x, & x > 0, \end{cases}$$

in ihre trigonometrische Fourierreihe.

Beispiel 1.4.14 Die Rechnung im Beispiel 1.4.13 ergibt, daß die Sinus–Fourierkoeffizienten b_n für ungerade n verschwinden. Wie kann man diese Tatsache direkt aus der Gestalt von $f(x)$ ableiten, ohne die b_n konkret zu berechnen?

Beispiel 1.4.15 Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz: *Die Fourierkoeffizienten a_n, b_n einer m mal stetig differenzierbaren 2π–periodischen Funktion, deren $(m+1)$–te Ableitung noch stückweise stetig ist, klingen asymptotisch für $n \to \infty$ mindestens wie*

$$|a_n|,\ |b_n| = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$$

ab.

Was kann man daraus für beliebig oft differenzierbare Funktionen folgern?

Hinweis: Mehrmals partiell integrieren. Man verwendet am besten die komplexe Darstellung der Fourierreihe (vgl. Skriptum).

Beispiel 1.4.16 Die Fourierreihe der Funktion $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, 2π–periodisch fortgesetzt lautet

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Finden Sie mit Hilfe dieser Reihe die Fourierreihe von

$$g(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

2π–periodisch fortgesetzt, ohne die Fourierkoeffizienten von g explizit zu berechnen.

Hinweis: Für stückweise stetig differenzierbare Funktionen kann man beweisen, daß die „gliedweise Differentiation“ ihrer Fourierreihe die Fourierreihe ihrer Ableitung ergibt (eine nicht a priori selbstverständliche Tatsache).

Beispiel 1.4.17 Verwenden Sie die Parseval'sche Gleichung und die beiden Fourierreihen aus Beispiel 1.4.16, um die Werte der folgenden Summen zu berechnen:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots,$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = 1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots.$

Beispiel 1.4.18 Die Fourierreihe der Funktion $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi,\pi)$, 2π–periodisch fortgesetzt lautet

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Finden Sie mit Hilfe dieser Reihe die Fourierreihe von $g(x) = \frac{x^2}{4}$, 2π–periodisch fortgesetzt, ohne die Fourierkoeffizienten von g explizit zu berechnen.

Hinweis: Man kann beweisen, daß die „gliedweise Integration“ der Fourierreihe einer stückweise stetigen Funktion aus $L^2([-l,l])$ die Fourierreihe ihrer Stammfunktion ergibt (eine nicht a priori selbstverständliche Tatsache). Der konstante Term der gesuchten Fourierreihe ergibt sich dabei, abgesehen von der willkürlichen Wahl einer Integrationskonstante, zunächst nur in Form einer unendlichen Reihe, deren Wert noch eigens zu berechnen ist.

Beispiel 1.4.19 Beweisen Sie die Formel

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(1-\cos m\pi)}{m\pi}\sin m\pi x \;=\; 1, \quad 0<x<1,$$

indem Sie die Funktion $f(x)=1,\ x\in(0,1)$ ungerade fortsetzen (Periode 2).

Beispiel 1.4.20 Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^{\alpha}}, \quad \alpha\in[0,\tfrac{1}{2}],$$

nicht die trigonometrische Fourierreihe einer 2π–periodischen, quadratisch integrierbaren Funktion sein kann.

Beispiel 1.4.21 Schreiben Sie die Standardform der trigonometrischen Fourierreihe für reellwertige Funktionen $f \in L^2([-l,l])$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \Big)$$

auf die „Amplituden–Phasen"–Darstellung

$$f(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{l} - \sigma_n\Big)$$

um. Die A_n und σ_n sind durch die a_n und b_n auszudrücken. Stellen Sie die Fourierreihe der 2π–periodischen „Sägezahnfunktion", $f(x) = x$, $0 \le x < 2\pi$, in Amplituden–Phasen–Form dar.

Beispiel 1.4.22 Es sei M der von den Funktionen $1/\sqrt{2}, \sin(\pi x)$, $\cos(\pi x)$ aufgespannte lineare Unterraum von $L^2([0,2])$. Bestimmen Sie die Funktion $f \in M$, die die Funktion $y(x) = x$ im Sinne der $||\cdot||_{L^2([0,2])}$ am besten approximiert. Berechnen Sie weiters die Norm des Fehlers, d.h., $||y - f||_{L^2([0,2])}$.

Beispiel 1.4.23 Man gebe die komplexe Schreibweise der Fourierreihe für Funktionen aus $L^2(a,b)$ an.

1.5 Wärmeleitungsgleichung und Sturm-Liouville-Problem

Beispiel 1.5.1 Man löse das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ &u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 1. \end{aligned}$$

Beispiel 1.5.2 Die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

beschreibt kleine, ebene, transversale Schwingungen einer gespannten Saite, wobei u die transversale Auslenkung ist. Man löse das Anfangs-Randwertproblem für diese Gleichung mit den Zusatzbedingungen

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x).$$

Beispiel 1.5.3

(a) Stellen Sie fest, ob die Differentialausdrücke L für $-1 \le x \le 1$

(1) $Ly := (1-x^2)y'' - 2xy'$,

(2) $Ly := y''' + (1-x^2)y'' - 2xy$,

Sturm–Liouville Differentialausdrücke sind und stellen Sie diese gegebenenfalls in der Standardform

$$Ly := \frac{1}{\varrho(x)}\left((-p(x)y')' + q(x)y\right)$$

dar.

(b) Für jene Differentialausdrücke L, die Sturm–Liouville Differentialausdrücke sind, untersuchen Sie:

(i) Ist der Differentialausdruck regulär?

(ii) Stellen Sie fest ob Ly mit den Randbedingungen

$$y(-1) = a, \quad y(1) = b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

selbstadjungiert ist.

(iii) Betrachten Sie das Eigenwertproblem $Ly_i = \lambda_i y_i$, $i \in \mathbb{N}$. Für welches Skalarprodukt bilden die Eigenfunktionen $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ein Orthogonalsystem ?

Beispiel 1.5.4 Zeigen Sie, daß die Green'sche Funktion $G(x,\xi)$ zum Randwertproblem

$$-y''(x) = f(x), \qquad y(0) = y(1) = 0$$

folgendermaßen aussieht:

$$G(x,\xi) = x(1-\xi) \quad \text{für } x \le \xi,$$

$G(x,\xi) = G(\xi,x)$ für $x \geq \xi$.

Hinweis: Man weist nach, daß der mittels dieser Funktion $G(x,\xi)$ definierte Integraloperator

$$(\mathcal{I}g)(x) := \int_0^1 G(x,\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

tatsächlich das Randwertproblem löst, d.h., $\mathcal{I}f = y$ gilt.

Beispiel 1.5.5 Zeigen Sie, daß man jeden auf dem Intervall $x \in (0,l)$ definierten regulären Differentialausdruck 2. Ordnung

$$Ly := \varphi_2(x)y'' + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y, \qquad \varphi_2(x) \neq 0 \quad \text{in } (0,l)$$

mittels einer geeigneten Transformation auf einen Differentialausdruck der selbstadjungierten Gestalt

$$\frac{d}{dx}\left(-p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y$$

zurückführen kann.

Hinweis: Man multipliziere den gegebenen Differentialausdruck Ly mit

$$p(x) := \exp\left(\int_0^x \psi(\xi)\, d\xi\right)$$

und wähle $\psi(\xi)$ in geeigneter Weise.

Beispiel 1.5.6 Zeigen Sie mit Hilfe der Fourierentwicklung, daß für die Lösung $y(x)$ des Randwertproblems

$$-y''(x) = f(x), \qquad y(0) = y(1) = 0$$

im Sinn der L^2–Norm auf $[0,1]$ folgende Abschätzung gilt:

$$||y|| \leq \frac{1}{\pi^2}\, ||f||.$$

Hinweis: Die Eigenfunktionen $\tilde{y}_n(x)$ des Differentialoperators $\mathcal{L}y = -y''$ zu den Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ sind gegeben durch

$$\tilde{y}_n(x) = \sin(n\pi x), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Kapitel 2

Funktionentheorie

2.1 Allgemeines über komplexe Zahlen

Beispiel 2.1.1 Schreiben Sie die folgenden Zahlen in Polarkoordinaten:

(1) -1,	(2) 3,	(3) $-4\,i$,	(4) $-2+2\,i$,
(5) $\sqrt{3}\,i$,	(6) $-\sqrt{27}-3\,i$,	(7) $1-i$,	(8) $2-i$,
(9) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$,	(10) $2-3\,i$.		

Beispiel 2.1.2 (a) Führen Sie die folgenden Operationen durch:

(1) $(-2+2\,i)\cdot(1-i)$, (2) $\dfrac{-4\,i}{-2+2\,i}$,

(3) $(1-i)^6$, (4) $(-2+2\,i)^{15}$.

(b) Führen Sie folgende Operationen graphisch durch:

(1) $(1-i)+(2+3\,i)$, (2) $(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)-(-\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i)$,

(3) $(-2+2\,i)\cdot(1-i)$, (4) $\dfrac{-4\,i}{-2+2\,i}$.

Beispiel 2.1.3 Finden Sie alle $z\in\mathbb{C}$, die die folgenden Relationen erfüllen:

(1) $\lvert z-5\rvert=6$,	(2) $\mathrm{Re}\,(z+2)=-1$,
(3) $\lvert z+i\rvert=\lvert z-i\rvert$,	(4) $\lvert z+2\,i\rvert\geq 1$,
(5) $\mathrm{Re}\,(i\,\overline{z})=3$,	(6) $0<\mathrm{Im}\,(z+1)\leq 2\,\pi$,
(7) $\arg\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)=0, \quad z_1\neq z_2$,	(8) $\lvert z+2\,i\rvert+\lvert z-2\,i\rvert=6$,
(9) $\mathrm{Im}\,(z^2)=4$.	

Beispiel 2.1.4 Beweisen Sie folgende Behauptungen:

(a) Ist $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$, so gilt entweder

$$\mathrm{Im}\, z = 0 \qquad \text{oder} \qquad |z| = 1.$$

(b) Für $z = \cos\alpha + i\,\sin\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ gilt

(1) $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha, \quad n \in \mathbb{N}$,

(2) $z^n - \frac{1}{z^n} = 2\,i\,\sin n\alpha, \quad n \in \mathbb{N}$.

(c) Falls $\mathrm{Im}\,(z+w) = 0 = \mathrm{Im}\,(zw)$, dann gilt entweder

$$z = \overline{w} \qquad \text{oder} \qquad z, w \in \mathbb{R}.$$

(d) $\mathrm{Re}\, z > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z-1| < |z+1|$.

Beispiel 2.1.5 Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Absolutbetrages:

(a) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$,

(b) $|z-w| = |w-z|$,

(c) $|z|^2 = |z^2| = z\,\overline{z}$,
folglich gilt für $z \neq 0$: $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$,

(d) $|zw| = |z| \cdot |w|$,
folglich gilt für $w \neq 0$: $\quad \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$,

(e) $\big|\,|z| - |w|\,\big| \leq |z-w|$,

(f) $|z| - |w| \leq |z+w|$.

Beispiel 2.1.6 Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} = r^2 - a^2 - b^2$$

einen Kreis um $z_0 = a + i\,b$ mit dem Radius r darstellt.

Beispiel 2.1.7 Es seien die Punkte P_1 und P_2 durch die Zahlen z_1 und z_2 dargestellt. Zeigen Sie: Gilt $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, so folgt
(1) $\dfrac{z_1}{z_2}$ ist rein imaginär, (2) $\angle P_1OP_2 = 90^o$.

Beispiel 2.1.8 Beweisen Sie: Liegen die Punkte z_1, z_2 und z_3 auf einer Geraden, so gibt es reelle Konstante α, β, γ, die nicht gleichzeitig verschwinden, mit

$$\alpha\, z_1 + \beta\, z_2 + \gamma\, z_3 = 0,$$

wobei $\alpha + \beta + \gamma = 0$ gilt.

2.2 Komplexe Funktionen

Beispiel 2.2.1 Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

$$(1) \qquad f(z) := \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} & \text{für} \quad z \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad z = 0, \end{cases}$$

$$(2) \qquad f(z) := \begin{cases} \dfrac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|} & \text{für} \quad z \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad z = 0. \end{cases}$$

Beispiel 2.2.2 (a) Beweisen Sie:

(1) $\arg \overline{z} = -\arg z$,

(2) $\arg \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \,(\operatorname{mod} 2\pi), \quad z_2 \neq 0.$

(b) Beweisen Sie, daß die folgenden Funktionen

(1) $f(z) = \overline{z}$ für $z \in \mathbb{C}$,

(2) $f(z) = \arg z$ für $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}_-$,

stetig sind.

Beispiel 2.2.3 Ist die Funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$ stetig? Ist sie dort auch gleichmäßig stetig?

Beispiel 2.2.4 Überprüfen Sie die Stetigkeit folgender komplexwertiger Funktionen und geben Sie den maximalen Definitionsbereich an:

1. $f(z) = \begin{cases} 7, & \operatorname{Im} z < 0, \\ 3 - \operatorname{Im} z \operatorname{Re} z, & 0 \leq \operatorname{Im} z < 5, \\ 3 - 5 \operatorname{Re} z + 7(5 - \operatorname{Im} z)|z|^2, & 5 \leq \operatorname{Im} z, \end{cases}$
2. $f(z) = z^3 - 5|z|$,
3. $f(z) = \frac{z}{|z|}$,
4. $f(z) = \frac{|z|^2}{z^2}$.

Beispiel 2.2.5 Sind die Funktionen

1. $f(z) = |z|, \qquad z \in \mathbb{C}$,
2. $f(z) = \operatorname{Re} z, \quad z \in \mathbb{C}$,
3. $f(z) = \arg z, \quad z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}_-$,

stetig differenzierbar?

Hinweis: Cauchy–Riemann'sche Differentialgleichungen.

Beispiel 2.2.6 Überprüfen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktionen:

(a) Ohne Zuhilfenahme der Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen:

$$f(z) = |z|.$$

(b) Mit Hilfe der Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & f(z) & = & 3x^2y + i3xy^2, \\ (2) & f(z) & = & x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4i(x^3y - xy^3). \end{array}$$

(c) Mit Hilfe der Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen in Polarform:

$$f(r, \varphi) = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Beispiel 2.2.7 Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen an $z = 0$ analytisch sind:

1. $f(z) = \operatorname{Im} z + i \operatorname{Re} z$,
2. $f(z) = \begin{cases} e^{-1/z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$

Beispiel 2.2.8 (a) Zeigen Sie:
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar an $z = z_0$, dann ist f auch stetig an z_0.

(b) Zeigen Sie:
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch und gelte $f(z) \in \mathbb{R}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

Hinweis: Cauchy–Riemann'sche Differentialgleichungen.

Beispiel 2.2.9 Für $w = f(z) := \frac{1+z}{1-z}$ finden Sie $\frac{dw}{dz}$ auf zwei verschiedene Arten. Ist $f(z)$ ganz?

2.3 Elementare Funktionen

Beispiel 2.3.1 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

(1) $\sqrt[3]{4-6i}$, (2) $\log \frac{i}{2}$, (3) $\log \sqrt[3]{-1}$,

(4) i^i, (5) $(1+i)^i$, (6) $\arcsin \frac{3i}{4}$.

Beispiel 2.3.2 (a) Berechnen Sie alle Nullstellen von $\cosh z$ und $\sinh z$.

(b) Zeigen Sie die Zusammenhänge

$$\cosh iz = \cos z \quad \text{und} \quad \sinh iz = i \sin z.$$

(c) Finden Sie die Nullstellen von $\sin z$ und $\cos z$.

Beispiel 2.3.3 Zeigen Sie, daß die Abbildungen

1. $z \to \cos z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
2. $z \to \sin z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

surjektiv sind. Sind diese Abbildungen sogar bijektiv?

Beispiel 2.3.4 Untersuchen Sie die Gültigkeit der aus dem Reellen bekannten Rechenregeln der Potenzfunktion auf Gültigkeit im Komplexen:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta, & \alpha, \beta \in \mathbb{C}, & z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}_-, \\
\text{(b)} \quad (z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}, & \alpha \in \mathbb{C}, & z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}_-, \\
\text{(c)} \quad (z_1 z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha, & \alpha \in \mathbb{C}, & z_1 z_2 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}_-,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}_-.
\end{array}
$$

Beispiel 2.3.5 Zeigen Sie

(a) $e^{2\pm 3\pi i} = -e^2$,

(b) $e^{\frac{\pi}{2} i} = i$,

(c) $e^{\frac{2+\pi i}{4}} = \sqrt{e}\, \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Berechnen Sie

(d) $\tan^{-1}(2i)$,

(e) $\cosh^{-1}(-1)$,

(f) $\ln \sqrt{i}$.

Beispiel 2.3.6 Beweisen Sie

(a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$,

(b) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \, \cos z_2 + \cos z_1 \, \sin z_2, \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

(c) $\sin(-z) = -\sin z, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$,

(d) $\sin iz = i \, \sinh z, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Beispiel 2.3.7 (a) Leiten Sie die folgende Definition des Hauptzweiges der Inversen der Cotangens–Funktion her:

$$\operatorname{arccot} z := \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{z+i}{z-i} \right), \quad z \neq \pm i.$$

(b) Berechnen Sie i^{-i^i}.

Beispiel 2.3.8 Es seien $f(z)$ und $g(z)$ analytisch in z_0 und $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Weiters gelte $g'(z_0) \neq 0$. Dann gilt die Regel von *de l'Hospital*:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von de l'Hospital die Grenzwerte folgender komplexer Funktionen:

1. $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1 - \cos z}{\sin^2 z}$,
2. $\lim\limits_{z \to e^{i\pi/3}} (z - e^{i\pi/3}) \left(\dfrac{z}{z^3 + 1} \right)$,
3. $\lim\limits_{z \to 0} (\cos z)^{1/z^2}$.

Beispiel 2.3.9 Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die

(a) $|\sin z| = 1$,

(b) $|\cos z| = 1$

gilt.

Beispiel 2.3.10 Beim „Schrödinger" wird über den Satz von Picard diskutiert:

Satz (Picard): *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht–konstante analytische Funktion. Dann ist das Bild (die Wertemenge) von f entweder ganz $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}$ mit Ausnahme eines einzigen Punktes.*

Willi sagt: „Der Satz gilt nicht! Betrachten wir die Funktion $e^{e^z} =: f(z)$. Dann nimmt $f(z)$ den Wert Null nicht an, da $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Außerdem nimmt e^{e^z} den Wert $e^0 = 1$ nicht an, da $e^z \neq 0$ gilt ($e^{e^z} \neq e^0 = 1, \forall z$). Es gilt aber nun, daß e^{e^z} als Zusammensetzung analytischer Funktinen analytisch ist. Wir haben also eine analytische Funktion, die die *beiden* Werte 0 und 1 nicht annimmt." Maja denkt kurz nach und sagt: „Der Satz ist gültig. Du argumentierst falsch!" Wer hat recht, Willi oder Maja?

Beispiel 2.3.11 Finden Sie eine gebrochene lineare Transformation

$$w(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

so, daß $w(-i) = -1$, $w(0) = i$, $w(i) = 1$ gilt.
In welche Kurve wird durch diese Abbildung die y–Achse übergeführt?

Beispiel 2.3.12 Bestimmen Sie das Bild des durch $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$ und $y = 1$ festgelegten Gebietes G in der z–Ebene unter der Abbildung

(a) $w = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} z$,

(b) $w = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} z + (1 - 2i)$.

Fertigen Sie in beiden Fällen eine Skizze an.

2.4 Komplexe Integration

Beispiel 2.4.1 Verifizieren Sie den Satz von Cauchy für die Funktion

$$f(z) = \sin 2z$$

und die Kurve C, die das Quadrat mit den Eckpunkten $1 \pm i$, $-1 \pm i$ berandet.

Beispiel 2.4.2 Berechnen Sie

$$\int_{-i}^{i} |z|\, dz \qquad \text{indem Sie den Weg}$$

(1) geradlinig, entlang der y–Achse,

(2) längs der linken,

(3) längs der rechten Hälfte des Randes des Einheitskreises mit dem Mittelpunkt im Ursprung,

wählen.

Beispiel 2.4.3 Berechnen Sie

$$\oint_C \pi\, e^{\pi \overline{z}}\, dz,$$

wobei C das Quadrat mit den Ecken $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = i$ ist.

Beispiel 2.4.4 (a) Beweisen Sie, daß auch im Komplexen die Formel für partielle Integration gilt:

$$\int F(z)\,G'(z)\,dz = F(z)\,G(z) - \int F'(z)\,G(z)\,dz.$$

(b) Benützen Sie diese Formel um die folgenden Integrale zu berechnen:

(1) $\int z\,e^{2z}\,dz, \qquad \int\limits_0^1 z\,e^{2z}\,dz,$

(2) $\int z^2 \sin 4z\,dz, \quad \int\limits_0^{2\pi} z^2 \sin 4z\,dz,$

(3) $\int\limits_C (z+2)\,e^{iz}\,dz$ entlang der Parabel $\pi^2 y = x^2$ von $(0,0)$ bis $(\pi, 1)$.

Beispiel 2.4.5 (a) Berechnen Sie

$$\oint\limits_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)\,(z-2)}\,dz,$$

wobei C die Kreislinie $C = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 3\}$ ist.

(b) Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \sin t,$$

wenn $t > 0$ und C die Kreislinie $C = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 3\}$ ist.

Beispiel 2.4.6 Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1}\,dz,$$

wobei

1. C ein Rechteck mit den Eckpunkten $2 \pm i,\ -2 \pm i$,

2. C ein Rechteck mit den Eckpunkten $\pm i,\ 2 \pm i$,

ist.

Beispiel 2.4.7 (a) Berechnen Sie

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3}\,dz,$$

wobei C der Kreis $C := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 2\}$ ist.

(b) Berechnen Sie

$$\oint_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz,$$

wobei C das Quadrat mit den Eckpunkten $2 \pm 2i,\ -2 \pm 2i$ ist.

Beispiel 2.4.8 Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin^6 z}{z-\pi/6}\,dz, \qquad C = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\},$

(b) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin^6 z}{(z-\pi/6)^3}\,dz, \qquad C = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\},$

(c) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{3z}}{z-i\pi}\,dz, \qquad C = \{z \in \mathbb{C};\ |z-1| = 4\}$ bzw.

$$C = \{z \in \mathbb{C};\ |z-2| + |z+2| = 6\}.$$

2.5 Potenzreihen

Beispiel 2.5.1 Berechnen Sie

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n},$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{in(n+1)}.$

Hinweis: Für eine komplexe, geometrische Reihe

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n, \quad q \in \mathbb{C},$$

gilt $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Beispiel 2.5.2 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

für

1. $a_k = \dfrac{1}{k^p}, \quad p \in \mathbb{N}$,
2. $a_k = \dfrac{k!}{k^k}$,
3. $a_k = k^{\ln k}$.

Beispiel 2.5.3 Um eine Aussage über die Konvergenz (absolute Konvergenz) einer komplexen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ zu machen, kann man spezielle Kriterien benützen. So wie im Reellen gelten auch hier das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium.
Finden Sie das Konvergenzgebiet der Reihe

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{4^n(n+1)^3}$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^2} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$.

Beispiel 2.5.4 Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

in eine Taylorreihe um $z = 0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Hinweis: $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Beispiel 2.5.5 Geben Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen an:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n - 1} z^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$,

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3\sqrt{n}}}{3n\ln n}\, z^n.$

Beispiel 2.5.6 (a) Beweisen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n(1-z)$$

für $|z|<1$ konvergiert und bestimmen Sie die Summe.

(b) Beweisen Sie, daß die Reihe aus (a) *gleichmäßig* gegen die berechnete Summe konvergiert, wenn $|z| \leq \frac{1}{2}$ gilt.

Beispiel 2.5.7 Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n z^n,$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^n)}{n!}\, z^n,$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}\, z^n.$

Beispiel 2.5.8 Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ zeigen Sie, daß diese Reihe für $z=1$ divergiert, aber für alle $z \neq 1$ mit $|z|=1$ konvergiert!

Hinweis: Benützen Sie das Cauchy'sche Konvergenzkriterium und schätzen Sie $(1-z)\sum_{n=k}^{m} \frac{z^n}{n}$ ab.

2.6 Laurentreihen, Residuensatz

Beispiel 2.6.1 Bestimmen Sie Art und Lage der singulären Stellen für jede der folgenden Funktionen:

(1) $\displaystyle\frac{1-\cosh z}{z},$

(2) $\displaystyle\frac{2z^3-z+1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)},$

(3) $e^{-1/(z-1)^2}$.

Beispiel 2.6.2 Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen:

(1) $\cot z$, (2) $\dfrac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.6.3 (a) Ermitteln Sie die Singularitäten und das Verhalten im Unendlichen für die folgenden Funktionen:

(1) $\dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$, (2) $\dfrac{z}{e^z-1}$, (3) $\cot z - \dfrac{1}{z}$.

(b) Bestimmen Sie die Residuen folgender Funktionen:

(1) $z^3 \cos\dfrac{1}{z-2}$, (2) $\dfrac{2z+1}{z^2-z-2}$, (3) $\dfrac{\sin z}{z^2}$, (4) $\dfrac{z+1}{z^2-z-2}$.

Beispiel 2.6.4 Entwickeln Sie die Funktionen

(1) $\dfrac{\cos z}{z^6}$, (2) $\dfrac{1}{z^2(z-1)}$, (3) $\sin(\dfrac{1}{z})$,

in eine Laurentreihe um $z=0$. Bestimmen Sie die Residuen und die Hauptteile der Funktionen.

Beispiel 2.6.5 Beweisen Sie:

(a) Die Funktion $g(z)$ habe eine m-fache Nullstelle an der Stelle $z = z_0$. Dann hat $\frac{g'}{g}$ einen einfachen Pol an $z = z_0$ mit Residuum m.

(b) Die Funktion $g(z)$ habe an der Stelle $z = z_0$ einen Pol der Ordnung m. Dann hat $\frac{g'}{g}$ einen einfachen Pol an $z = z_0$ mit Residuum $-m$.

Beispiel 2.6.6 Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z\,(z-1)\,(z-2)}$$

im Inneren des Kreisringes $\{z \in \mathbb{C};\ 1<|z|<2\}$ in ihre Laurentreihe bezüglich des Entwicklungspunktes $z_0 = 0$.

Beispiel 2.6.7 Die Funktion $f(z)$ habe an $z_0=0$ einen Pol der Ordnung k, und es sei $p(z)$ ein Polynom vom Grad n. Zeigen Sie, daß die Funktion $q(z) := p(f(z))$ an $z_0=0$ einen Pol der Ordnung nk hat.

Beispiel 2.6.8 Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

(a) in eine Taylorreihe um $z_0 = 0$,

(b) in eine Laurentreihe um $z_0 = i$,

und geben Sie jeweils das Konvergenzgebiet an. Bestimmen Sie das Residuum von f an der Stelle $z_0 = i$.

Beispiel 2.6.9 Die Laurentreihe für $\cot z$ lautet:

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \cdots$$

Mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos z &= \cosh(iz), \\ i \sin z &= \sinh(iz), \end{aligned}$$

zeigen Sie

$$\coth z = i \cot(iz)$$

und berechnen damit die ersten vier Glieder der Laurentreihe von $\coth z$.

Beispiel 2.6.10 Berechnen Sie

$$\operatorname*{Res}_{z_0=0} \frac{\cot z \coth z}{z^3}.$$

Beispiel 2.6.11 Die Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ seien in einer Umgebung von z_0 analytisch und es gelte $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$. Betrachten Sie die Funktion $f(z) := g(z)/h(z)$ und zeigen Sie:

(a) Die Funktion $f(z)$ hat an der Stelle z_0 einen Pol 1. Ordnung.

(b) $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Geben Sie das Residuum der Funktion $f(z) = 1/\sin z$ an den Stellen $z_0 = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, an.

Beispiel 2.6.12 Ermitteln Sie die singulären Stellen der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} e^{(z-1)^{-1}}$$

und geben Sie die entsprechenden Residuen in möglichst einfacher Form (Potenzen von e) an.

Beispiel 2.6.13 Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$(1) \quad \oint_C \frac{dz}{(z-1)^2\,(1+z^2)} \qquad C := \{z \in \mathbb{C};\ |z-1-i| = \sqrt{2}\},$$

$$(2) \quad \oint_C \frac{e^{mz}\,dz}{(z-ai)\,(z-\frac{i}{a})} \qquad C := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1,\ -1<a<1,\ m \in \mathbb{R}\}.$$

Beispiel 2.6.14 Berechnen Sie

$$(1) \quad \oint_{C_n} \tan \pi z\, dz, \qquad C_n := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = n\},$$

$$(2) \quad \oint_C \frac{2z^2+5}{(z+2)^3\,(z^2+4)\,z^2}\, dz, \qquad C := \{z \in \mathbb{C};\ |z-2i| = 1\},$$

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z(z^2+1)}\, dz, \qquad t > 0,$$

wobei C ein Rechteck mit den Ecken $1 \pm 2i$, $-1 \pm 2i$ ist.

Beispiel 2.6.15 Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$.

Beispiel 2.6.16 Beweisen Sie

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x-ib}\, dx = 2\pi i e^{-ab}; \qquad a > 0, \quad \operatorname{Re} b > 0,$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x+ib}\, dx = 0; \qquad a > 0, \quad \operatorname{Re} b > 0.$$

Beispiel 2.6.17 Beweisen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{5 - 4\cos\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{12}.$$

Hinweis: Setzen Sie $z := e^{i\varphi}$ und $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$.

Beispiel 2.6.18 Beweisen Sie

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}\, dz = 0,$$

wobei der Integrationsweg Γ_R in der Abb. 2.1 dargestellt ist.

Abbildung 2.1: Der Integrationsweg Γ_R

Beispiel 2.6.19 Es ist zu zeigen

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx = \pi\, \ln 2.$$

(a) Zeigen Sie zuerst, daß für den Hauptzweig der Logarithmusfunktion die Identität

$$\ln(z^2 + 1) = \ln(i + z) + \ln(i - z) - i\,\pi$$

gilt.

(b) Betrachten Sie, siehe Abb. 2.2 für C,

$$\oint\limits_C \frac{\ln(z + i)}{z^2 + 1}\, dz$$

und benützen Sie das Ergebnis von Beispiel 2.6.18.

Abbildung 2.2: Der Integrationsweg C

Beispiel 2.6.20 Berechnen Sie

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Hinweis: Integrieren Sie $\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz$ über die in Abb. 2.3 dargestellten Kurve C und lassen Sie anschließend $R \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ streben.

Abbildung 2.3: Der Integrationsweg C

Beispiel 2.6.21 Beweisen Sie den *Satz vom logarithmischen Residuum:*

Satz: *Die Funktion $f(z)$ sei in einem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ differenzierbar mit Ausnahme endlich vieler Polstellen im Inneren von G. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma=\partial G} \frac{d}{dz}(\ln f(z))\, dz = \sum_{l=1}^{n} \tilde{m}_l - \sum_{k=1}^{p} \hat{m}_k,$$

wobei n die Anzahl der Nullstellen innerhalb von G mit den Vielfachheiten $\tilde{m}_l$, $1 \leq l \leq n$, und p die Anzahl der Pole innerhalb von G mit den Ordnungen $\hat{m}_k$, $1 \leq k \leq p$, ist.

Wie lautet die Formel, falls $\tilde{m}_l = \hat{m}_k = 1$, $\forall\, l, k$ gilt?

Hinweis: Beispiel 2.6.5.

Beispiel 2.6.22 Berechnen Sie

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos n\varphi}{1 + 2a\cos\varphi + a^2}\, d\varphi, \qquad a \in (-1, 1),$$

für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Hinweis: Residuensatz in geeigneter Weise verwenden.

Beispiel 2.6.23 Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

Beispiel 2.6.24 Berechnen Sie $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos t)^2}\,dt, \quad a > b > 0.$

Beispiel 2.6.25 Mit Hilfe des Residuensatzes berechnen Sie

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} \qquad \text{und} \qquad \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$$

indem Sie zuerst das folgende Integral untersuchen

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z^6+1}.$$

Wählen Sie C wie in Abb. 2.2.

Hinweis: Die Regel von de l'Hospital gilt auch im Komplexen.

2.7 Konforme Abbildungen und harmonische Funktionen

Beispiel 2.7.1 Unter welchen Voraussetzungen ist die bilineare Abbildung

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d};\ z \in \mathbb{C}$$

(a) eine analytische Abbildung bzw.

(b) eine konforme Abbildung? Geben Sie den Bildbereich an.

(c) Betrachten Sie $w : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ mit $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ist diese Abbildung bijektiv?

Beispiel 2.7.2 Geben
Sie eine Abbildung $w(z)$ an, die das Gebiet $\{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1\}$ konform auf das Gebiet $\{z \in \mathbb{C};\ |\frac{\pi}{2} - \arg z| < \frac{\pi}{8}\}$ abbildet.

Hinweis: Bilden Sie zuerst $\{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1\}$ auf die Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ konform ab.

Beispiel 2.7.3 Gegeben sei

$$u(x,y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y).$$

(a) Zeigen Sie, daß

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

gilt, d.h., $u(x,y)$ harmonisch ist.

(b) Finden Sie ein $v(x,y)$, sodaß $f(z) = f(x,y) := u + iv$ analytisch ist.

Beispiel 2.7.4 (a) Beweisen Sie: Ist z_0 ein fixer Punkt im oberen Teil der Gauß'schen Zahlenebene ($\operatorname{Im} z_0 > 0$), so bildet die Transformation

$$w(z) := e^{i\Theta_0}\left(\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}\right), \quad \Theta_0 \in \mathbb{R}$$

die obere Hälfte der Gauß'schen Zahlenebene auf das Innere des Einheitskreises ab.

(b) Geben Sie eine bilineare Abbildung an, die die obere Hälfte der Gauß'schen Zahlenebene auf das Innere des Einheitskreises abbildet und für die

$$w(i) = 0,\ w(\infty) = -1$$

gilt.

Beispiel 2.7.5 (a) Zeigen Sie, daß $f(z) = f(x,y) = x^2 - y^2 + 2y$ harmonisch ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Funktion f aus (a) harmonisch in der w–Ebene unter der Transformation $z = w^3$ ist.

Hinweis: Es ist zu zeigen, daß mit $f(u,v) = f(w^3)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0, \quad \forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2$$

gilt.

Beispiel 2.7.6 Gegeben sei $\varphi(z) = \varphi(x,y)$. Durch die Transformation $f(z) = f(x+iy) = u + iv = w$ geht das Paar (x,y) in das Paar (u,v) und die Funktion $\varphi(x,y)$ in $\varphi(x(u,v), y(u,v))$ über. Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right),$$

falls f analytisch und $f'(z) \neq 0$ ist.

Beispiel 2.7.7 Zeigen Sie, daß die Funktinen u und v,

$$u + iv = \ln(z - a), \qquad z \in \mathbb{C} \backslash \{a\}, \ a \in \mathbb{R}$$

harmonisch sind. Dabei bezeichnet „ln" den Hauptzweig der Logarithmusfunktion.

Die folgenden Beispiele 2.7.8 – 2.7.11 beschäftigen sich mit der Lösung des *Dirichlet–Problems*. Deshalb wiederholen wir hier zwei wichtige Aussagen, die wir benötigen, um diese Aufgaben zu lösen.

Das Dirichlet–Problem auf dem Einheitskreis. Die Formel von Poisson.

Es sei $B \cup \partial B$ der Einheitskreis. Eine Funktion, die im Inneren des Kreises B harmonisch ist und auf dem Rand ∂B die vorgeschriebenen Werte $u_0(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ annimmt, ist durch

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)\, u_0(\eta)\, d\eta}{1 - 2r \cos(\eta - \varphi) + r^2} \tag{2.1}$$

gegeben. Ist $u_0(\eta) \in C[0, 2\pi]$, so ist $u \in C(B \cup \partial B)$.

Das Dirichlet–Problem auf der Halbebene.

Eine Funktion, die in der oberen Halbebene, $y = \operatorname{Im} z > 0$, harmonisch ist und auf der x–Achse die vorgeschriebenen Werte $u_0(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, annimmt, ist durch

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y u_0(\eta) d\eta}{y^2 + (x - \eta)^2} \tag{2.2}$$

gegeben.

Beispiel 2.7.8 Finden Sie die Lösung des folgenden Dirichlet–Problems:

$$\begin{aligned} \triangle\, u(x, y) &= 0, \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y > 0, \\ u(x, 0) := u_0(x) &= \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Hinweis: Wenden Sie die Formel (2.2) an oder überlegen Sie direkt.

Beispiel 2.7.9 Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \triangle\, u(x,y) &= 0, \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y > 0, \\ u(x,0) := u_0(x) &= \begin{cases} \tau_0, & x < -1, \\ \tau_1, & -1 < x < 1, \\ \tau_2, & x > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei τ_0, τ_1, τ_2 gegebene Konstanten sind.

Beispiel 2.7.10 Finden Sie die Lösung $u(r,\varphi)$ des Dirichlet–Problems auf dem Einheitskreis, mit der Randbedingung

$$u(1,\varphi) := u_0(\varphi) = \begin{cases} 1, & 0 < \varphi < \pi, \\ 0, & \pi < \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

indem Sie den Einheitskreis konform auf die obere Halbebene abbilden, vgl. Beispiel 2.7.4(b), und Aufgabe 2.7.8 benützen.

Beispiel 2.7.11 (a) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$u(r,\varphi) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right), \qquad 0 < r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

im Inneren des Kreises harmonisch ist.

(b) Zeigen Sie

$$\lim_{r\to 1_-} u(r,\varphi) := u(1,\varphi) = \begin{cases} 1, & 0 < \varphi < \pi, \\ -1, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

(c) Können Sie den obigen Ausdruck für $u(r,\varphi)$ aus der Poisson'schen Formel (2.1) herleiten?

Hinweis: Es gilt

$$\int \frac{d\alpha}{a + b\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan\left(\frac{(a-b)\,\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) + \text{const.},$$

falls $a^2 > b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Kapitel 3

Integraltransformationen

3.1 Laplace–Transformation

Beispiel 3.1.1 Bestimmen Sie die Laplace–Transformierten folgender Funktionen:

(1) $\exp(\omega x) f(x)$,

(2) $f^2(x)$, wobei f Lösung des Anfangswertproblems $f'(x) = f^2(x) + e^{-x}$, $f(0) = 1$ ist.

Hinweis: Unter (1) und (2) ist gemeint, daß das Ergebnis auf die Laplace–Transformierte $\varphi(s) = \mathcal{L}[f(x)]$ von f zurückgeführt ist.

Beispiel 3.1.2 Berechnen Sie

(1) $\mathcal{L}\,[x^2 e^{3x}](s)$,

(2) $\mathcal{L}\,[e^{-2x} \sin 4x](s)$,

(3) $\mathcal{L}\,[e^{4x} \cosh 5x](s)$,

(4) $\mathcal{L}\,[e^{-2x}(3 \cos 6x - 5 \sin 6x)](s)$.

Hinweis: Beispiel 3.1.1(1).

Beispiel 3.1.3 Berechnen Sie

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-3}\right](x)$,
2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{3/2}}\right](x)$,

   Hinweis: Beweisen Sie zuerst

$$\mathcal{L}[x^\alpha](s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12s^3}{s^4-256}\right](x)$.

   Hinweis: Satz von Borel.

Beispiel 3.1.4 Berechnen Sie

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right](x)$,
2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right](x)$.

Beispiel 3.1.5 Berechnen Sie

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right](x).$$

Hinweis: Finden Sie ein $\varphi(s)$ mit

$$\frac{d}{ds}\varphi(s) = \frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}$$

und verwenden Sie die Formel

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[g(x)](s) = -\mathcal{L}[xg(x)](s).$$

Beispiel 3.1.6 Berechnen Sie

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)\right](x).$$

Hinweis: Finden Sie ein $\varphi(\sigma)$ mit

$$\int_s^\infty \varphi(\sigma)\,d\sigma = \ln(s+2) - \ln(s+1)$$

und verwenden Sie die Formel

$$\int_s^\infty \mathcal{L}\left[g(x)\right](\sigma)d\sigma = \mathcal{L}\left[\frac{g(x)}{x}\right](s).$$

Beispiel 3.1.7 Lösen Sie mit Hilfe der Laplace–Transformation das Randwertproblem

$$u''(x) - 3u'(x) + 2u(x) = 4e^{2x}, \qquad u(0) = -3, \quad u'(0) = 5.$$

Beispiel 3.1.8 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -17y_1(x) + 20y_2(x) + 3, \\ y_2'(x) &= \quad 3y_1(x) - \ 6y_2(x), \\ y_1(0) &= 40, \quad y_2(0) = 20, \end{aligned}$$

mit Hilfe der Laplace–Transformation.

Beispiel 3.1.9 Lösen Sie die folgende partielle Differentialgleichung mit Hilfe der Laplace–Transformation:

Gesucht ist diejenige Funktion $u(x,t)$, die

$$2\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - u, \qquad u(x,0) = 6e^{-3x}$$

erfüllt und die für alle $t>0,\ x>0$ beschränkt bleibt.

Hinweis: Ähnlich wie man viele gewöhnliche Differentialgleichungen mittels Laplace–Transformation auf algebraische Gleichungen zurückführen kann, lassen sich gewisse partielle Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduzieren. In dem vorliegenden Beispiel denkt man sich die Gleichung für jedes feste x bezüglich t transformiert.

3.2 Fourier–Transformation

Beispiel 3.2.1 Stellen Sie die Funktion $f(x) := \exp(-a|x|),\ x \in \mathbb{R};\ a > 0$, mittels ihres Fourier–Integrals

$$f(x) = \int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega + \int_0^\infty b(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega$$

dar.

Hinweis: Zweimal partiell integrieren.

Beispiel 3.2.2 Berechnen Sie die Fourier–Transformierte von

$$f(x) := \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ \frac{1}{2}, & |x| = a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

a fest im $\mathbb{R}_+$.

Beispiel 3.2.3 Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)\ \cos(\omega x)}{\omega}\,dx\,.$$

Hinweis: Beispiel 3.2.2.

Beispiel 3.2.4 (a) Geben Sie die Fourier–Cosinus–Transformierte von

$$f(x) = e^{-\beta x}, \quad \beta > 0$$

an.

(b) Mit Hilfe von (a) zeigen Sie

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\beta v)}{v^2 + \alpha^2}\,dv = \frac{\pi}{2\alpha}\,e^{-\beta\alpha}, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Beispiel 3.2.5 Lösen Sie die Integralgleichung

$$\int_0^\infty f(x)\ \sin(\omega x)\,dx = \begin{cases} 1-\omega, & 0 \le \omega \le 1, \\ 0, & \omega > 1, \end{cases}$$

nach $f(x)$ auf.

Beispiel 3.2.6 Gegeben seien die Funktionen $g(x)$ und $r(x)$ und ihre Fourier–Transformierten $G(\omega)$ und $R(\omega)$. Lösen Sie die Integralgleichung

$$y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(v)\, r(x-v)\, dv \tag{3.1}$$

nach $y(x)$ auf.

Beispiel 3.2.7 Berechnen Sie $y(x)$ aus der Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(v)\, dv}{(x-v)^2 + a^2} = \frac{1}{x^2 + b^2}\,, \qquad 0 < a < b.$$

Beispiel 3.2.8 Berechnen Sie die Inverse Fourier–Transformierte von

$$K(\omega, y) := \begin{cases} e^{-\omega y}, & \operatorname{Re}\omega > 0, \\ e^{\omega y}, & \operatorname{Re}\omega < 0, \end{cases}$$

wobei y ein positiver reeller Parameter ist.

Beispiel 3.2.9 Leiten Sie die Poisson'sche Formel für die obere Halbebene her, indem Sie mit Hilfe der Fourier–Transformation die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ |u(x,y)| \leq \text{const.}, \quad \forall\,(x,y) \end{cases}$$

lösen.

Hinweis: Von der Fourier–Transformierten $\varphi(\omega, y) := \mathcal{F}\,[u(x,y)]\,(\omega)$, wobei y ein Parameter und x die Variable in Bezug auf $\mathcal{F}$ ist, setzen Sie voraus, daß sie für große Werte von y beschränkt ist. Benützen Sie auch das Ergebnis von Beispiel 3.2.8.

Beispiel 3.2.10 Lösen Sie das Randwertproblem

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0$$

für

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x < 0, \\ u_0, & x > 0. \end{cases}$$

Hinweis: Beispiel 3.2.9.

Kapitel 4

Normierte Räume, Hilberträume, Fourierreihen

4.1 Metrische Räume

Lösung 4.1.1 Es bezeichne $d_2(x, y)$ den euklidischen Abstand von x und y. Zu zeigen sind die Metrikeigenschaften:

(1) $d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^2$

1. Fall: x, y liegen auf einer Geraden durch x_0;

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d_2(x, y) \geq 0 \\ d(x, y) &= 0 \Leftrightarrow d_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

2. Fall: x, y liegen nicht auf einer Geraden durch x_0;

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \underbrace{d_2(x, x_0)}_{\geq 0} + \underbrace{d_2(y, x_0)}_{\geq 0} \geq 0 \\ d(x, y) &= 0 \Leftrightarrow d_2(x, x_0) = d_2(y, x_0) = 0 \Leftrightarrow x = y = x_0. \end{aligned}$$

Die Punkte x, y liegen also doch auf einer Geraden durch x_0, sogar auf jeder Geraden.

(2) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^2$

1. Fall: x, y liegen auf einer Geraden durch x_0;
$d(x, y) = d_2(x, y) = d_2(y, x) = d(y, x)$

2. Fall: x, y liegen nicht auf einer Geraden durch x_0;
$d(x,y) = d_2(x,x_0) + d_2(y,x_0) = d(y,x)$.

(3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z), \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^2$

1. Fall: x, y, z liegen auf einer Geraden durch x_0;
$d(x,z) = d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z) = d(x,y) + d(y,z)$

2. Fall: x, y liegen auf einer Geraden durch x_0, aber z liegt nicht drauf;

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,z) &= \underbrace{d_2(x,y) + d_2(y,x_0)}_{\geq} + d_2(z,x_0) \geq \\ &\geq \quad d_2(x,x_0) + d_2(z,x_0) = d(x,z) \end{aligned}$$

3. Fall: x, z liegen auf einer Geraden durch x_0, aber y liegt nicht drauf;

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,z) &= d_2(x,x_0) + d_2(y,x_0) + d_2(y,x_0) + d_2(z,x_0) \geq \\ &\geq \quad d_2(x,x_0) + d_2(z,x_0) = d_2(x,z) = d(x,z) \end{aligned}$$

4. Fall: Kein Paar von Punkten aus x, y, z liegt auf einer Geraden durch x_0;

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,z) &= d_2(x,x_0) + d_2(y,x_0) + d_2(y,x_0) + d_2(z,x_0) \geq \\ &\geq \quad d_2(x,x_0) + d_2(z,x_0) \geq d_2(x,z) = d(x,z). \end{aligned}$$

□

Lösung 4.1.2 1. Die Kugeln der euklidischen Metrik sehen alle ähnlich aus (vgl. Abb. 4.1).

2. Dies gilt auch für die Summenmetrik (vgl. Abb. 4.2).

3. Die Kugeln der diskreten Metrik sind sehr einfach, da

$$U_\varrho\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} \text{ für } \varrho \leq 1 \text{ und } U_\varrho\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2 \text{ für } \varrho > 1$$

gilt. Also

$$U_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = U_{\frac{1}{2}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad U_2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2.$$

4. Wir nehmen an, daß „Paris“ im Ursprung liegt. Wenn der Mittelpunkt der Kugel „Paris“ ist, sehen die Kugeln aus, wie bei der euklidischen Metrik, siehe U_1 und U_2 mit $x_0 = \binom{0}{0}$.

$U_1\left(\binom{0}{0}\right)$ $\quad$ $U_{\frac{1}{2}}\left(\binom{0}{0}\right)$ $\quad$ $U_2\left(\binom{2}{2}\right)$

Abbildung 4.1: Die Kugeln der euklidischen Metrik

$U_1\left(\binom{0}{0}\right)$ $\quad$ $U_{\frac{1}{2}}\left(\binom{0}{0}\right)$ $\quad$ $U_2\left(\binom{2}{2}\right)$

Abbildung 4.2: Die Kugeln der Betragssummen–Metrik

$U_1\left(\binom{0}{0}\right)$ $U_{\frac{1}{2}}\left(\binom{0}{0}\right)$ $U_2\left(\binom{2}{2}\right)$

Abbildung 4.3: Die Kugeln der Metrik des französischen Eisenbahnsystems

Doch ist der Mittelpunkt der Kugel nicht „Paris“, so sehen die Kugeln anders aus. Ist der Abstand Mittelpunkt–„Paris“ größer oder gleich dem Kugelradius, so entartet die Kugel zu einer Strecke, siehe $U_2\left(\binom{0}{0}\right)$ in Abb. 4.3.

Definiert man die Norm von x als

$$\|x\| := d_d(x, 0),$$

so ist die Eigenschaft

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und } x \in \mathbb{R}^2$$

nicht erfüllt. Gegenbeispiel:
Es sei $x = \binom{1}{1}$ und $\lambda = 2$. Dann ist

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 1 \neq 2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2.$$

Jede Norm definiert zwar eine Metrik, vgl. Skriptum, aber nicht umgekehrt!

Lösung 4.1.3 1. Untersuchung von $\{\frac{1}{n}\, e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:
Die Folge konvergiert in beiden Metriken gegen die konstante Folge

$(0)_{n\in\mathbb{N}} = (0,0,0,\ldots)$:

$$
\begin{aligned}
d_\infty\left(\frac{1}{n}\,e_n, 0\right) &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\left(\frac{1}{n}e_n\right)_k - (0)_k\right| = \\
&= \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{für } n > \frac{1}{\varepsilon}, \\
d'\left(\frac{1}{n}\,e_n, 0\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left|\left(\frac{1}{n}e_n\right)_k - (0)_k\right| = \\
&= \frac{1}{n!}\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n\,n!} < \varepsilon \quad \text{für } n > \frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

2. Untersuchung von $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:
   Die Folge konvergiert bezüglich d_∞ nicht, aber bezüglich d' gegen $(0)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht bezüglich d_∞, da sie keine Cauchy–Folge ist:

   $n, k \in \mathbb{N},\ n \neq k\ \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
d_\infty(e_n, e_k) &= \sup_{m\in\mathbb{N}} |(e_n)_m - (e_k)_m| = \\
&= \sup((0,\ldots,0,\underbrace{-1}_{k-te},0,\ldots,0,\underbrace{1}_{n-te},0,\ldots)) = 1,
\end{aligned}
$$

Stelle

   d.h., $d_\infty(e_n, e_k)$ wird nicht beliebig klein.

   Die Folge $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0 bezüglich d':

$$
\begin{aligned}
d'(e_n, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |(e_n)_k - (0)_k| = \\
&= \frac{1}{n!}|1-0| = \frac{1}{n!} < \varepsilon \quad \text{für } n > \frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

3. Untersuchung von $\{n!\,e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:
   Die Folge konvergiert bezüglich keiner der beiden Metriken, da keine Cauchy–Folge vorliegt. Bezüglich d_∞ ist $\{n!\,e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sogar unbeschränkt.

$$
\begin{aligned}
d_\infty(n!\,e_n, k!\,e_k) &= \sup_{m\in\mathbb{N}} |(n!\,e_n)_m - (k!\,e_k)_m| = \\
&= \sup((0,\ldots,0,-k!,0,\ldots,0,n!,0,\ldots)) =
\end{aligned}
$$

$$= \max(n!, k!),$$

wird also sehr groß!

$$\begin{aligned} d'\,(n!\,e_n, k!\,e_k) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\,|(n!\,e_n)_m - (k!\,e_k)_m| = \\ &= |n! - 0|\,\frac{1}{n!} + |0 - k!|\,\frac{1}{k!} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Lösung 4.1.4 $d_\infty(x,y) \geq 0,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n;\ d_\infty(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$:

Es seien x, y, z beliebig im $\mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$d_\infty(x,y) = \max\left(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right) \geq 0,$$

da $|x_k - y_k| \geq 0,\ \forall\ 1 \leq k \leq n$.

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & \max\left(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right) = 0 \Leftrightarrow \\ & |x_k - y_k| = 0, \quad \forall\ 1 \leq k \leq n \Leftrightarrow \\ & x_k = y_k, \quad \forall\ 1 \leq k \leq n \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

$d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$:

Es seien x, y beliebig im $\mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \max\left(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right) = \\ &= \max\left(|y_1 - x_1|, \ldots, |y_n - x_n|\right) = d_\infty(y,x). \end{aligned}$$

$d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z) \geq d_\infty(x,z),\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

Es seien x, y, z beliebig im $\mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z) &= \max\left(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right) + \\ &+ \max\left(|y_1 - z_1|, \ldots, |y_n - z_n|\right) \geq \\ &\geq \max\left(\underbrace{|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|}_{\geq |x_1 - z_1|}, \ldots, \underbrace{|x_n - y_n| + |y_n - z_n|}_{\geq |x_n - z_n|}\right) \geq \\ &\geq \max(|x_1 - z_1|, \ldots, |x_n - z_n|) = d_\infty(x,z). \end{aligned}$$

Lösung 4.1.5 Die Metrikeigenschaften $d'(x,y) \geq 0, \forall\, x, y; d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ und $d'(x,y) = d'(y,x),\ \forall\, x, y$ sind offensichtlich erfüllt. Für die Dreiecksungleichung betrachte man die Abbildung

$$v \mapsto \frac{v}{1+v}\,, \qquad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+\,,$$

die monoton wachsend (differenzieren) ist.

Sei $s = d(x,y),\ t = d(y,z)$ und $u = d(x,z)$, so ist zu zeigen

$$d'(x,y) + d'(y,z) = \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t} \geq \frac{u}{1+u} = d'(x,z), \quad \forall\, x,y,z.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t} &= \frac{s+t+st}{1+s+t+st} + \frac{st}{1+s+t+st} \geq \\ &\geq \frac{s+t+st}{1+s+t+st} \geq \frac{u}{1+u}, \end{aligned}$$

da $s+t \geq u$ und damit $s+t+st \geq u$, d.h., $d'(x,y)$ ist eine Metrik.

Äquivalenz:

1. $d(x,y) \geq d'(x,y),\ \forall\, x,y \Rightarrow U_\varrho^d(x_0) \subseteq U_\varrho^{d'}(x_0),\ \forall\, \varrho \in \mathbb{R}^+, \forall\, x \in X$; also enthält jede d'–Kugel eine d–Kugel.

2. Sei $U_\varrho^d(x_0)$ eine d–Kugel, dann gilt

   $$U^{d'}_{\frac{\varrho}{1+\varrho}}(x_0) \subseteq U_\varrho^d(x_0),$$

   und damit ist d äquivalent zu d':

   $$x \in U^{d'}_{\frac{\varrho}{1+\varrho}}(x_0) \ \Rightarrow\ d'(x,x_0) \leq \frac{\varrho}{1+\varrho} \Leftrightarrow \frac{d(x,x_0)}{1+d(x,x_0)} \leq \frac{\varrho}{1+\varrho} \Rightarrow$$

   $d(x,x_0) \leq \varrho$, wegen der Monotonie von $v \mapsto \frac{v}{1+v}$ $\Rightarrow$

   $$x \in U_\varrho^d(x_0).$$

Lösung 4.1.6 (a) Wir betrachten die Menge $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

$Rd\,A = [0,1] \neq Rd\,(Rd\,A) = Rd\,([0,1]) = \{0,1\}$.

Die Aussage gilt nicht, weil A keine inneren Punkte hat, $A^o = \emptyset$.

(b) Wir zeigen $Rd\,(\overline{A}) = Rd\,A$. Dazu benützen wir folgende Aussage:

$$x \in Rd\,M \quad \Leftrightarrow \quad \text{in jeder offenen Umgebung von } x \text{ liegen Punkte } y_1 \in M^o \text{ und } y_2 \in (\overline{M})^c.$$

$x \in Rd\,A$, U offene Umgebung von $x \Leftrightarrow$ in U liegen Punkte $y_1 \in A^o = (\overline{A})^o$ und $y_2 \in (\overline{A})^c = (\overline{\overline{A}})^c \Leftrightarrow x \in Rd\,(\overline{A})$. □

Wir zeigen $\overline{Rd\,A} = Rd\,A$. Es gilt $Rd\,A \subseteq \overline{Rd\,A}$.
Es sei $x \in \overline{Rd\,A}$. Dann ist x ein Berührungspunkt von $Rd\,A$. Nach der Definition ist $Rd\,A = \overline{A} \setminus A^o$ mit $A^o \subseteq \overline{A}$.
Angenommen $x \notin Rd\,A \Leftrightarrow x \in A^o$, d.h., $\exists$ eine offene Ungebung U von x, die ganz in A^o liegt ($\Leftrightarrow U \cap Rd\,A = \emptyset$). Dies ist aber ein Widerspruch zu „x ist Berührungspunkt von $Rd\,A$“. Folglich ist $x \notin Rd\,A$ falsch und $x \in Rd\,A$ gilt. Dann ist aber $\overline{Rd\,A} \subseteq Rd\,A$ und $\overline{Rd\,A} = Rd\,A$.

Wir können auch äquivalenterweise den $Rd\,A$ als $Rd\,A = (A^o)^c \setminus (\overline{A})^c$ mit $(\overline{A})^c \subseteq (A^o)^c$ definieren. In diesem Fall ist die Argumentation mit Hilfe der äußeren Punkte $(\overline{A})^c$ analog. □

(c) Wir betrachten $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. $\overline{A^o} = \emptyset \;\Rightarrow\; \overline{A^o} = \emptyset \neq (\overline{A})^o = (0,1)$.

Lösung 4.1.7 Es sei $x_0 \in [0,1]$. Wir zeigen, daß f im Punkt x_0 stetig ist, d.h., $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$\forall\, x, \quad |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{3} \\ \text{für } \forall\, n \geq N(\frac{\varepsilon}{3}) \\ \text{wegen der glm.} \\ \text{Konvergenz von } f_n}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{3} \\ \text{für } \forall\, x \text{ mit} \\ |x - x_0| < \delta \\ \text{wegen der} \\ \text{Stetigkeit von } f_n}} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{3} \\ \text{für } \forall\, n \geq N(\frac{\varepsilon}{3}) \\ \text{wegen der glm.} \\ \text{Konvergenz von } f_n}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lösung 4.1.8 $\displaystyle\int_0^x f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(0), \quad \forall\, x \in [0,1] \quad \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n'(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wegen der glm. Konvergenz}}}{=} \int_0^x g(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow\ \exists\, G(x) \text{ in } C^1[0,1], \text{ da } g(t) \text{ stetig}}}{=} G(x) - G(0) = f(x) - f(0) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad f$ in $C^1[0,1]$ und $g(x) = f'(x)$, $\forall\, x$. □

4.2 Banachräume, L^p-Räume

Lösung 4.2.1 Siehe Abbildungen 4.4, 4.5 und 4.6.

Abbildung 4.4: Einheitssphären bzgl. der $\| \cdot \|_1$–Norm für $n = 2$ und $n = 3$

Abbildung 4.5: Einheitssphären bzgl. der $\|\cdot\|_2$–Norm für $n = 2$ und $n = 3$

Lösung 4.2.2 $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$: Nach dem allgemeinen Resultat aus dem Skriptum folgt sofort mit $p = 2$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2.$$

Zur Übung führen wir den Beweis durch:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i| \cdot \sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}|x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung}} = \\
&= \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2$$

$||\cdot||_2, ||\cdot||_\infty$:

$$\max_{1\leq i\leq n}|x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n}\max_{1\leq i\leq n}|x_i| \Leftrightarrow$$

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$$

Abbildung 4.6: Einheitssphären bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$–Norm für $n = 2$ und $n = 3$

$||\cdot||_1, ||\cdot||_\infty$: Auch hier folgt das Resultat aus der allgemeinen Aussage. Man rechnet das Ergebnis auch sehr leicht nach:

$$\max_{1\le i\le n} |x_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le n \cdot \max_{1\le i\le n} |x_i| \Leftrightarrow$$

$$||x||_\infty \le ||x||_1 \le n\,||x||_\infty$$

Lösung 4.2.3 (a) Da die Matrix A eine lineare Abbildung $A:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist, sind die Bilder von Geraden wieder Gerade. Bezüglich der $||\cdot||_1$– und $||\cdot||_\infty$–Norm genügt es deshalb, die Bilder von drei Ecken der Einheitssphäre unter A zu finden (Abb. 4.7).

Das Bild des Einheitskreises ist eine Ellipse. Man findet die Längen der Halbachsen und die Winkel, die sie mit der x–Achse schließen, indem man die folgende Min–Max Aufgabe löst:

$$\begin{pmatrix} u_1(\varphi) \\ u_2(\varphi) \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}; \quad \sqrt{u_1^2(\varphi) + u_2^2(\varphi)} \to \text{ Min, Max,} \quad 0 \le \varphi \le 2\,\pi.$$

(b) Wir zeigen zuerst, daß $||A||_\infty \le \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ gilt.

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$||Ax||_\infty \;=\; \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| \le \max_{1\le i\le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \max_{1\le j\le n} |x_j| \right) =$$

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = A\binom{1}{0} & b_1 = A\binom{1}{-1} & c_1 = A\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi},\ \varphi \cong 1.017 \\[1em]
a_2 = A\binom{0}{1} & b_2 = A\binom{1}{1} & c_2 = A\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi},\ \varphi \cong 2.588 \\[1em]
a_3 = A\binom{0}{-1} & b_3 = A\binom{-1}{1} & \\[1em]
||A||_1 = 3 & ||A||_\infty = 2.5 & ||A||_2 \cong 2.56
\end{array}
$$

Abbildung 4.7: Die Normen $|| \cdot ||_1, || \cdot ||_\infty$ und $|| \cdot ||_2$ für die lineare Abbildung $A:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$= \left(\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \cdot ||x||_\infty \Leftrightarrow$$

$$||A||_\infty := \max_{||x||_\infty=1} ||Ax|| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Das bedeutet, daß die maximale Streckung der Vektoren der Einheitssphäre, $||x||_\infty = 1$, und damit $||A||_\infty$, *nicht größer* als $\max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ ist. Nennen wir i_0 jene Zeile von A für die $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ gilt.

Wir konstruieren nun ein $x^0 \in \mathbb{R}^n$, so daß $||A||_\infty = ||Ax^0||_\infty$ gilt, nämlich

$$x_j^0 := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad a_{i_0 j} \ge 0 \\ -1, & \text{falls} \quad a_{i_0 j} < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_{i_0 j} x_j = |a_{i_0 j}|, \ \forall\, 1 \le j \le n.$$

Damit existiert ein $x^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $||A||_\infty = ||Ax^0||_\infty = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$, das Maximum wird angenommen und es folgt (1.1).

Lösung 4.2.4 Es seien $x_1, x_2 \in S \ \Rightarrow \ \|x_1\| \le 1, \ \|x_2\| \le 1;$

$$t \in [0,1]: \qquad \|(1-t)x_1 + tx_2\| \ \le \ |1-t| \underbrace{\|x_1\|}_{\le 1} + |t| \underbrace{\|x_2\|}_{\le 1} \ \le \ (1-t) + t = 1. \quad \square$$

Lösung 4.2.5 (a) Der punktweise Grenzwert der Folge ist, siehe Abb. 4.8,

$$\lim_{n\to\infty} x^n = x^* = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

(1) $x^* \in L^2[0,1]: \ \int\limits_0^1 (x^*)^2 \, d\mu = 0 < \infty,$

(2) $\forall\, n, x^n \in L^2[0,1]: \ \int\limits_0^1 x^{2n} \, d\mu = \left. \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^1 = \frac{1}{2n+1} < \infty,$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} ||x^n - x^*||_{L^2}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 |x^n - x^*|^2 \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x^{2n} \, d\mu =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left. \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0,$$

d.h., die Folge konvergiert in $L^2([0,1])$ gegen x^*.

Abbildung 4.8: Die Funktion x^* aus Beispiel 4.2.5 und zwei Funktionen der Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus Beispiel 4.2.6

(b) (1) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest:

$$||f_n||_{L^1} = \int_0^\infty |f_n|\, d\mu = \int_0^\infty e^{-x/n}\, dx = -n\, e^{-x/n}\Big|_0^\infty = n < \infty \Rightarrow$$

$f_n \in L^1([0,\infty]),\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n$ fest.

(2) Es sei x fest. Dann ist der punktweise Grenzwert von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1 = f^*(x) \notin L^1([0,\infty))$,
d.h., der punktweise Grenzwert von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ liegt nicht in $L^1([0,\infty))$. Wir zeigen noch, daß diese Folge keine Cauchy–Folge ist und somit nicht in $L^1([0,\infty))$ konvergieren kann: o.B.d.A. sei $n > m \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} ||f_n - f_m||_{L^1} &= \int_0^\infty |f_n - f_m|\, d\mu = \int_0^\infty \left(e^{-x/n} - e^{-x/m}\right) dx = \\ &= -n\, e^{-x/n} + m\, e^{-x/m}\Big|_0^\infty = n - m > 1, \quad \forall\, n \neq m \Rightarrow \end{aligned}$$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy–Folge.

□

Lösung 4.2.6 (a) $(C[a,b], ||\cdot||_1)$, $\quad ||f||_1 = \int_a^b |f(x)|dx; \quad a = -2,\ b = 2;$

Ist $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge?

Es sei $n > m$, vgl. Abb. 4.8. Dann ist

$$||f_n - f_m||_1 = \int_{-2}^{2} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx = \int_{-1/m}^{1/m} \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\leq 1,\, \forall\, n,m}\, dx \leq \frac{2}{m} \Leftrightarrow$$

$$||f_n - f_m||_1 \leq \frac{2}{m} < \varepsilon; \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) \text{ mit } N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil \geq \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy–Folge.

(b) $(C[a,b], ||\cdot||_\infty)$, $||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $a = -2$, $b = 2$; Es sei $n > m$. Dann gilt

$$||f_n - f_m||_\infty = \sup_{x\in[-2,2]} |f_n(x) - f_m(x)| = 1 - \frac{m}{n} > 0.$$

Für $n = 2m$ gilt: $1 - \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{2}$ und damit wird $||f_n - f_m||_\infty$ nicht klein, d.h., $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy–Folge bezüglich der $||\cdot||_\infty$–Norm.

Lösung 4.2.7 Es ist zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n, m > N(\varepsilon), \|x_m - x_n\|_1 < \varepsilon.$$

Es sei $m > n$. Dann sind die Funktionen $x_m(t)$, $x_n(t)$ und $|x_m(t) - x_n(t)|$ wie in der Abb. 4.9.

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\|_1 &= \int_{-1}^{1} |x_m(t) - x_n(t)| dt = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right)\left(1 - \frac{n}{m}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n+m}(m-n) = \\
&= 2\left(\frac{m-n}{n+m}\right) = 2\left(1 - \frac{2n}{m+n}\right).
\end{aligned}$$

Wählt man $m = 2n$, dann gilt

$$\|x_m - x_n\|_1 = 2\left(1 - \frac{2n}{3n}\right) = \frac{2}{3} = \text{const !}$$

für beliebig große m und n. Die Folge ist keine Cauchy-Folge bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm.

Abbildung 4.9: Zwei Funktionen $x_m(t)$ und $x_n(t)$ für $m > n$.

Lösung 4.2.8 Es sei $m > n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sqrt{t+\frac{1}{m}}} - \frac{1}{\sqrt{t+\frac{1}{n}}}\right| &= \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}{\sqrt{t+\frac{1}{m}}\sqrt{t+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{t+\frac{1}{m}}+\sqrt{t+\frac{1}{n}}\right)} \leq \\ &\leq \frac{2\frac{1}{n}}{\left(t+\frac{1}{n}\right)\cdot 2\sqrt{t}} = \frac{1}{n\left(t+\frac{1}{n}\right)\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\|_p^p &= \int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{t+\frac{1}{m}}} - \frac{1}{\sqrt{t-\frac{1}{n}}}\right|^p dt \leq \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{n^p\left(t+\frac{1}{n}\right)^p t^{p/2}}\, dt = \frac{1}{n^p}\int_0^1 \frac{1}{\left(t+\frac{1}{n}\right)^p t^{p/2}}\, dt.\end{aligned}$$

Variablentransformation: $t = \frac{s}{n}$, $dt = \frac{ds}{n}$ ergibt

$$\|x_m - x_n\|_p^p \leq \frac{1}{n^p}\int_0^n \frac{1}{\left(\frac{s+1}{n}\right)^p \left(\frac{s}{n}\right)^{p/2}}\,\frac{ds}{n} =$$

$$= \quad n^{\frac{p}{2}-1} \int\limits_0^n \frac{1}{(s+1)^p \, s^{p/2}} \, ds \;<\; n^{\frac{p}{2}-1} \underbrace{\int\limits_0^\infty \frac{1}{(s+1)^p \, s^{p/2}} \, ds}_{:=I}.$$

Das uneigentliche Integral existiert für $1 \leq p < 2$ und daher $\|x_m - x_n\|_p < n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} I$. Da $\frac{1}{2} - \frac{1}{p} < 0$ ist, kann man den letzten Ausdruck, für entsprechend große n, beliebig klein machen.

Lösung 4.2.9 1. X ist ein linearer Vektorraum:

$f_1, f_2 \in X \Rightarrow f_1 + f_2 \in C[0,1]$ und $(f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) = 0$,

$f \in X,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\, f \in C[0,1]$ und $(\alpha\, f)(0) = \alpha\, f(0) = 0$.

2. $\| \cdot \|_\infty$ ist eine Norm $\quad\quad \surd$

3. Wir wissen, daß $(C[0,1], \| \cdot \|_\infty)$ ein Banachraum ist. Ist $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $C[0,1]$, so gibt es ein $f(x) \in C[0,1]$ mit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Gilt noch $f_n(0) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, dann hat man

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \max_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Es sei $x = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(0) - f(0)| = |0 - f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0. \qquad \square$$

Lösung 4.2.10 Es ist $(M, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Wir zeigen die Vollständigkeit:
Es sei $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in M $\Rightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon): \quad \forall\, n, m \geq N(\varepsilon) \quad ||v_n - v_m|| < \varepsilon.$$

Die Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist aber auch eine Cauchy–Folge in X und da X vollständig ist, gibt es ein $v \in X$ mit

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} ||v_n - v_m|| = 0.$$

Wir zeigen: v ist Grenzwert von $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ im Raum M, d.h.,
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M(\varepsilon),$ sodaß $||v_m - v|| < \varepsilon,\ \forall\, m \geq M(\varepsilon)$:

$$||v_m - v|| \leq \underbrace{||v_m - v_n||}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{2},\\ \forall\, m,n\geq M_1(\varepsilon)\\ \{v_m\}\text{ ist}\\ \text{Cauchy–Folge}}} + \underbrace{||v_n - v||}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{2},\\ \forall\, n\geq M_2(\varepsilon)\\ \{v_n\}\text{ konvergiert}\\ \text{gegen } v}} < \varepsilon,$$

$\forall\, m \geq \max\{M_1(\varepsilon), M_2(\varepsilon)\}$. Da $M = \overline{M}$, liegt v in M. $\square$

Lösung 4.2.11 1. Gegenbeispiel: Es sei $f \equiv 1$ $(\neq 0)$ und $f \in C^1[a,b] \Rightarrow$ $||f|| = 0$, daher ist $||f|| := \max\limits_{a\leq x\leq b} |f'(x)|$ keine Norm.

2. • $f, g \in C^1[0,1] \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} ||f+g|| &= \max_{a\leq x\leq b} \{|f(x)+g(x)| + |f'(x)+g'(x)|\} \leq \\ &\leq \max_{a\leq x\leq b} \{|f(x)+f'(x)|\} + \max_{a\leq x\leq b} \{|g(x)+g'(x)|\} = \\ &= ||f|| + ||g||. \end{aligned}$$

• $\alpha \in \mathbb{R},\ f \in C^1[0,1] \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} ||\alpha\, f|| &= \max_{a\leq x\leq b} \{|\alpha\, f(x)| + |\alpha\, f'(x)|\} \leq \\ &\leq \max_{a\leq x\leq b} \{|\alpha||f(x)| + |\alpha||f'(x)|\} = |\alpha|||f||. \end{aligned}$$

• $f \in C^1[0,1],\ \ ||f|| = \max\limits_{a\leq x\leq b} \{|f(x)| + |f'(x)|\} = 0 \Leftrightarrow$

$$|f(x)| = |f'(x)| = 0 \quad \forall\, x \in [a,b] \ \Rightarrow\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Stetigkeit von } f \text{ und } f'}}{f(x) \equiv 0.}$$

$\square$

Lösung 4.2.12 (a) Der Raum $(C^1[a,b], ||\cdot||_{1,\infty})$ ist ein Banachraum.

Beweis: Vollständigkeit: Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy–Folge in $||\cdot||_{1,\infty} \Rightarrow$
die Folgen f_n und f_n' sind Cauchy–Folgen in $||\cdot||_\infty \Rightarrow$
$f_n \to f$ gleichmäßig und $f_n' \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow$
f ist stetig differenzierbar und es gilt $f' = g$.

(b) Man sieht sofort, daß mit der Folge etwas nicht stimmt, denn sie wäre auch ein Gegenbeispiel für den Raum $(C[a,b], ||\cdot||_\infty)$, von dem man weiß, daß er ein Banachraum ist.

Willi argumentiert zu oberflächlich:

- Aus der punktweisen Konvergenz

$$x \in [a,b] \text{ fest } \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n = f^*(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a,b), \\ 1, & x = b, \end{cases}$$

kann man *nicht* auf die Konvergenz bezüglich der $||\cdot||_\infty$–Norm schließen. Tatsächlich, gilt hier [1] *nicht*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f^*||_\infty = \lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b}\left|\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n - f^*(x)\right| = 0.$$

- Diese Folge hat aber einen viel gravierenderen „Schönheitsfehler". Sie ist keine Cauchy–Folge bezüglich der $||\cdot||_\infty$–Norm!

  Wäre $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge, so müßte gelten:

$$\forall\,\varepsilon\ \exists\, N(\varepsilon): \quad \forall\, n,m \ge N(\varepsilon) \ \Rightarrow\ ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon.$$

  Es sei o.B.d.A. $m > n \ge 1 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} ||f_n - f_m||_\infty &= \max_{a\le x\le b}\left|\underbrace{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^m}_{\ge 0}\right| = \\ &= \max_{a\le x\le b}\left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^m\right] = \\ &=: \max_{a\le x\le b} e(x);\ e(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^m,\ m > n. \end{aligned}$$

  Es gilt

$$e'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = a + (b-a)\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}};$$

  (rechnen Sie nach!) und damit ist

$$||f_n - f_m||_\infty = \left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} - \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}}\right].$$

  Wählen Sie $m = 2n$, dann folgt $||f_n - f_m||_\infty = 1/4,\ \forall\, m = 2n \ge 2$.

$\square$

Maja hat recht! Übrigens ist $(C^1[a,b], ||\cdot||_\infty)$ tatsächlich *kein Banachraum.*

[1] $\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n - f^*(x)$ ist *nicht stetig* auf $[a,b]$ und damit ist $||f_n - f^*||_\infty$ nicht definiert.

Lösung 4.2.13 Wir definieren

$$F(x)(t) = f(t) + \varrho \int_0^1 \sin(t + x(s))\, ds.$$

Dann ist F eine Abbildung von $C[0,1]$ auf sich selbst. Die Abschätzung

$$\begin{aligned} |F(x)(t_1) - F(x)(t_2)| &\leq |f(t_1) - f(t_2)| \ + \\ &+ |\varrho| \int_0^1 |\sin(t_1 + x(s)) - \sin(t_2 + x(s))|\, ds \ \leq \\ &\leq |f(t_1) - f(t_2)| + |\varrho|\, |t_1 - t_2| \end{aligned}$$

zeigt nämlich, daß wegen der Stetigkeit von f auch $F(x)$ stetig ist. Weiters gilt

$$\begin{aligned} |F(x_1)(t) - F(x_2)(t)| &\leq |\varrho| \int_0^1 |\sin(t + x_1(s)) - \sin(t + x_2(s))|\, ds \leq \\ &\leq |\varrho| \int_0^1 |x_1(s) - x_2(s)|\, ds \leq |\varrho|\, \|x_1 - x_2\|_\infty, \end{aligned}$$

woraus

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_\infty \leq |\varrho|\, \|x_1 - x_2\|_\infty$$

folgt, und damit wegen $|\varrho| < 1$, daß F eine Kontraktion ist. Der Banach'sche Fixpunktsatz liefert das gewünschte Resultat.

Lösung 4.2.14 Die Abbildung $F : B \to B$, definiert durch $F(x) = Kx + b$ ist wegen

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \|K(x_1 - x_2)\| \leq \|K\|\, \|x_1 - x_2\|$$

eine Kontraktion. Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Die Rekursion $x_{n+1} = F(x_n)$ liefert für beliebige Wahl von x_0 eine gegen die Lösung konvergente Folge. Für die Wahl $x_0 = b$ ist diese Folge gegeben durch

$$x_n = \sum_{j=0}^{n} K^j b.$$

Lösung 4.2.15 Linearität ist offensichtlich. Die Stetigkeit folgt aus

$$|f(x)| = |x'(t_0)| \leq \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \sup_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = \|x\|_{1,\infty}.$$

Lösung 4.2.16 Linearität ist offensichtlich. Die Stetigkeit folgt aus

$$|f(x)| \leq \int_a^b |x(t)|\, dt \leq \sup_{a\leq t\leq b} |x(t)| \int_a^b dt = (b-a)\|x\|_\infty .$$

Lösung 4.2.17 $\underline{L \text{ beschränkt}}$ $\quad\Rightarrow\quad ||L\,v||_U \leq M\,||v||_V,\ \forall\, v \in V \quad\Rightarrow$

$||L\,v_1 - Lv_2||_U = ||L(v_1 - v_2)||_U \leq M\,||v_1 - v_2||_V \leq \varepsilon$ für

$||v_1 - v_2||_V \leq \dfrac{\varepsilon}{M} =: \delta(\varepsilon) \quad\Rightarrow\quad \underline{L \text{ ist stetig}}.$

$\underline{L \text{ stetig}}$. Angenommen L ist nicht beschränkt $\quad\Rightarrow$

$\exists\,\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ v_n \in V$ mit $||Lv_n||_U \geq n||v_n||_V$,

setze $z_n := \dfrac{v_n}{n||v_n||_V} \ \Rightarrow\ ||z_n||_V \to 0$ aber $||Lz_n||_U \geq 1 \Rightarrow$

Widerspruch zur Stetigkeit von L $\Rightarrow$ $\underline{L \text{ ist beschränkt}}$. $\square$

Es sei L beschränkt und

$$\begin{aligned} ||L||_B &:= \sup_{||v||_V=1} ||Lv||_U = \sup_{||v||_V\neq 0} \frac{||Lv||_U}{||v||_V}, \\ M &:= \inf\{m \in \mathbb{R} :\ ||Lv||_U \leq m||v||_V\}. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist $M = ||L||_B$, siehe Abb. 4.10.

Abbildung 4.10: Geometrische Interpretation der Zahlen $||L||_B$ und M

$||L||_B$ ist die kleinste obere Schranke für $\frac{||Lv||_U}{||v||_V}$, M ist die größte untere Schranke für die Zahlen m mit $\frac{||Lv||_U}{||v||_V} \leq m$.

Wir zeigen, daß $M = ||L||_B$ gilt:

1. $||L||_B \leq M$:
   M erfüllt $||Lv||_U \leq M\,||v||_V, \quad \forall\, v \in V \;\Leftrightarrow$
   $$\tfrac{||Lv||_U}{||v||_V} \leq M, \quad \forall\, v \in V,\; ||v|| \neq 0 \Leftrightarrow$$
   $$||L||_B = \sup_{||v||\neq 0} \tfrac{||Lv||_U}{||v||_V} \leq M \;\Leftrightarrow\; ||L||_B \leq M.$$

2. $||L||_B \geq M$:
   $$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, v: \quad \tfrac{||Lv||_U}{||v||_V} > M - \varepsilon \Rightarrow$$
   $$\sup_{||v||\neq 0} \tfrac{||Lv||_U}{||v||_V} > M - \varepsilon \Leftrightarrow$$
   $$||L||_B > M - \varepsilon, \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\Leftrightarrow\; ||L||_B \geq M.$$

□

Lösung 4.2.18 1. Die Abbildung $D:\; (C^1[a,b], ||\cdot||_\infty) \to (C[a,b], ||\cdot||_\infty)$ ist linear aber
$$D(f) = \frac{d}{dx}\, f$$
ist <u>nicht stetig</u>.

Gegenbeispiel: $f_n(x) := \dfrac{\sin(n^2 x)}{n} \in C^1[a,b]$.

Es gilt $f_n \to 0$ in $||\cdot||_\infty$, aber $Df_n(x) = n \cdot \cos(n^2 x)$ konvergiert nicht in $||\cdot||_\infty$.

2. Die Abbildung $D:\; (C^1[a,b], ||\cdot||_{1,\infty}) \to (C[a,b], ||\cdot||_\infty)$ ist <u>stetig</u>, da sie beschränkt ist. Es gilt:
   $$||Df||_\infty = ||f'||_\infty \leq 1 \cdot (||f||_\infty + ||f'||_\infty) = ||f||_{1,\infty},$$
   d.h., $||D||_{B((C^1[a,b],||\cdot||_{1,\infty}),(C[a,b],||\cdot||_\infty))} = 1$.

   Beweis: $||D|| \leq 1$ ist klar; daß „=" gilt, folgt aus dem folgenden Beispiel:
   $$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}, \quad f_n'(x) = \frac{\cos nx}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
   Für große n kann die Ungleichung
   $$\begin{aligned} ||Df_n||_\infty = ||f_n'||_\infty &= \max_{a\leq x\leq b} \left|\frac{\cos nx}{n}\right| \leq M \cdot (||f_n||_\infty + ||f_n'||_\infty) = \\ &= M \cdot \left(\max_{a\leq x\leq b} \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| + \max_{a\leq x\leq b} \left|\frac{\cos nx}{n}\right| \right) \end{aligned}$$
   für $M < 1$ nicht gelten $\Rightarrow\; M = 1$.

□

4.3 Hilberträume

Lösung 4.3.1 1. • $(u,u) = \underbrace{7|u_1|^2}_{\geq 0} + \underbrace{3|u_2|^2}_{\geq 0} + \underbrace{4|u_3|^2}_{\geq 0} \geq 0, \quad \forall\, u \in \mathbb{C}^3.$

- $(u,u) = 0 \Leftrightarrow |u_1|^2 = |u_2|^2 = |u_3|^2 = 0 \Leftrightarrow u = 0.$
- $$\begin{aligned}(u,v) &= 7u_1\overline{v}_1 + 3u_2\overline{v}_2 + 4u_3\overline{v}_3 = \overline{7\overline{u}_1 v_1 + 3\overline{u}_2 v_2 + 4\overline{u}_3 v_3} = \\ &= \overline{7v_1\overline{u}_1 + 3v_2\overline{u}_2 + 4v_3\overline{u}_3} = \overline{(v,u)}, \quad \forall\, u,v \in \mathbb{C}^3.\end{aligned}$$
- Die Linearität in (u,v) ist klar.

Damit ist (u,v) ein inneres Produkt.

2. Hierdurch wird *kein* inneres Produkt definiert, da

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} + 0 + 3 - 25 < 0 \quad \text{gilt.}$$

Ein Skalarprodukt müßte aber $(u,u) \geq 0,\ \forall\, u \in \mathbb{C}^3$ erfüllen.

3. Auch dies definiert *kein* inneres Produkt.
Gegenbeispiel: $u_0 := (i,1,0)^\top \Rightarrow$

$$(u_0,u_0) = \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = i^2 + 1^2 + 0^2 = -1 + 1 = 0, \ \ u_0 \neq 0!$$

Lösung 4.3.2

$$(x,y) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (x_1+x_2)(y_1+y_2) + 2x_3y_3 \Rightarrow$$

$$(x,x) = (x_1+x_2)^2 + 2x_3^2$$

und mit $x = (-1,1,0)^\top \neq 0$ folgt $(x,x) = 0$. Deshalb ist (x,y) *kein* inneres Produkt.

Lösung 4.3.3

a) Die Definitheit folgt aus

$$(x,x) = 2x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_3)^2.$$

Die anderen Eigenschaften eines inneren Produktes sind offensichtlich auch erfüllt.

b) Für $x \in \{(1,0,0)\}^\perp$ gilt

$$((1,0,0),x) = 3x_1 - x_3 = 0.$$

Eine Basis des dadurch bestimmten Unterraumes ist z. B. gegeben durch $\{(0,1,0),(1,0,3)\}$.

Lösung 4.3.4

$$||f||_L := \left(\int_0^\infty \omega(x) f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(f,f)}; \quad f \in L_{[0,\infty)} \Leftrightarrow ||f||_L < \infty.$$

(a) Wir zeigen zuerst: $f, g \in L_{[0,\infty)} \;\Rightarrow\; (f,g) < \infty$

Beweis:

$$\begin{aligned}(f,g) \le |(f,g)| &= \left|\int_0^\infty \omega(x) f(x) g(x) dx\right| \le \int_0^\infty \left|\sqrt{\omega}\, f\right| \left|\sqrt{\omega}\, g\right| dx \le \\ &\le \left(\int_0^\infty \omega f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \omega g^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = ||f||_L\, ||g||_L < \infty.\end{aligned}$$

Aus $(f,f) = 0$ folgt wegen der Stetigkeit von f, daß $f(x) \equiv 0$ ist. Die restlichen Eigenschaften des inneren Produktes sind leicht zu beweisen. □

(b) $f \in L_{[0,\infty)},\; g \in L_{[0,\infty)} \;\Rightarrow\; f + g \in L_{[0,\infty)}$

Beweis:

$f \in L_{[0,\infty)} \Leftrightarrow ||f||_2 < \infty, \qquad g \in L_{[0,\infty)} \Leftrightarrow ||g||_2 < \infty \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned}||f+g||_L^2 &= \int_0^\infty \omega(x)\left(f(x)+g(x)\right)^2 dx = \\ &= \int_0^\infty \omega f^2\,dx + 2\int_0^\infty \omega f g\,dx + \int_0^\infty \omega g^2\,dx \le \\ &\le ||f||_L^2 + 2\,||f||_L\,||g||_L + ||g||_L^2 < \infty. \\ &\uparrow \; {\scriptstyle (u,v) \le ||u||_L\, ||v||_L}\end{aligned}$$

□

Lösung 4.3.5 1. $(u, \alpha\, v) = \overline{(\alpha\, v, u)} = \overline{\alpha\,(v,u)} = \overline{\alpha}\,\overline{(v,u)} = \overline{\alpha}\,(u,v)$, $\forall\, u, v \in V,\; \alpha \in \mathbb{C}$.

2. $(u, v_1+v_2) = \overline{(v_1 + v_2, u)} = \overline{(v_1, u)}+\overline{(v_2, u)} = (u, v_1)+(u, v_2),\ \forall\, u, v_1, v_2 \in V.$

3. $||u|| := \sqrt{(u, u)}$; Es ist zu zeigen

   - $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \quad \forall\, u, v \in V,$
   - $||\lambda u|| = |\lambda|\, ||u||, \quad \forall\, u \in V,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C},$
   - $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

   Beweis:

   - $||u + v|| = \underbrace{\sqrt{(u, u) + 2\,\mathrm{Re}(u, v) + (v, v)} \leq \sqrt{(u, u) + 2||u||\,||v|| + (v, v)}}_{\text{Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung}}$
     $= ||u|| + ||v||, \quad \forall\, u, v \in V,$
   - $||\lambda u|| = \sqrt{(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda\,\overline{\lambda}(u, u)} = |\lambda|\, ||u||, \quad \forall\, u \in V,\ \lambda \in \mathbb{C},$
   - $||u|| = 0 = \sqrt{(u, u)} \;\Rightarrow\; (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. □

Lösung 4.3.6 • $y_1 \in M^\top,\ y_2 \in M^\top \;\Rightarrow\; y_1 + y_2 \in M^\top$

Beweis:

$$\left.\begin{array}{lcll} y_1 \in M^\top & \Leftrightarrow & (y_1, x) = 0, & \forall\, x \in M \\ y_2 \in M^\top & \Leftrightarrow & (y_2, x) = 0, & \forall\, x \in M \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(y_1 + y_2, x) \underset{\uparrow \text{ Linearität von } (\cdot,\cdot)}{=} (y_1, x) + (y_2, x) = 0, \quad \forall\, x \in M.$$

- $y \in M^\top,\ \lambda \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \lambda\, y \in M^\top$

  Beweis:
  $y \in M^\top \Leftrightarrow (y, x) = 0, \quad \forall\, x \in M \Rightarrow$
  $(\lambda\, y, x) \underset{\uparrow \text{ Linearität von } (\cdot,\cdot)}{=} \lambda\,(y, x) = 0, \quad \forall\, x \in M.$ □

Lösung 4.3.7 1. $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = (x + y, x + y) + (x - y, x - y) =$

$= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (y, x) - (x, y) + (y, y) =$

$= 2\,(x, x) + 2\,(y, y) = 2\,||x||^2 + 2\,||y||^2, \quad \forall\, x, y \in V.$ □

2. $\frac{1}{2}\left\|x - y\right\|^2 + 2\left\|z - \frac{1}{2}\Big(x + y\Big)\right\|^2 =$

   $= \frac{1}{2}(x - y, x - y) + 2\Big(z - \frac{x + y}{2}, z - \frac{x + y}{2}\Big) =$

$$= \frac{1}{2}(x,x) - \frac{1}{2}(x,y) - \frac{1}{2}(y,x) + \frac{1}{2}(y,y) + 2(z,z) - (x,z) - (y,z) -$$
$$-(z,x) - (z,y) + \frac{1}{2}(x,x) + \frac{1}{2}(x,y) + \frac{1}{2}(y,x) + \frac{1}{2}(y,y) =$$
$$= (z-x, z-x) + (z-y, z-y) = ||z-x||^2 + ||z-y||^2, \quad \forall\, x,y,z \in V. \quad \square$$

Lösung 4.3.8 1. **(⇒)** Es sei $x \perp y \Leftrightarrow (x,y) = 0$. Zu zeigen ist

$$||x + \alpha y|| \geq ||x||, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} ||x+\alpha y||^2 &= (x+\alpha y, x+\alpha y) = \\ &= (x,x) + (x,\alpha y) + (\alpha y, x) + (\alpha y, \alpha y) = \\ &= ||x||^2 + \underbrace{\overline{\alpha}(x,y) + \alpha(y,x)}_{=0,\ \text{nach Voraussetzung}} + \alpha\overline{\alpha}||y||^2 = \\ &= ||x||^2 + \underbrace{|\alpha|^2\,||y||^2}_{\geq 0} \geq ||x||^2, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$||\, x + \alpha y\,||^2 \geq ||x||^2, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}.$$

(⇐) Es sei $||\, x + \alpha y\,|| \geq ||x||, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$. Es ist zu zeigen, daß $x \perp y$ gilt.

Indirekter Beweis:

Wir nehmen an, daß $x \not\perp y$ ist und zeigen, daß dann ein $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ existiert, mit $||w|| = ||x + \alpha_0\, y|| < ||x||$, was im Widerspruch zur Annahme steht.

Wir lösen zuerst diese Aufgabe graphisch im $\mathbb{R}^2$, vgl Abb. 4.11.

Man sieht sofort, daß für $w := x + \alpha_0\, y$, $||w|| < ||x||$ gilt und für α_0 hat man dann

$$0 = (w,y) = (x,y) + \alpha_0(y,y) \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = -\frac{(x,y)}{(y,y)}.$$

Kehren wir nun zum formalen Beweis (für *beliebige* innere Produkte) zurück.

Wir zeigen: Für $\alpha_0 := -\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$ gilt $||x + \alpha_0 y|| < ||x||$.

$$\begin{aligned} ||x+\alpha_0 y||^2 &= ||x||^2 + \overline{\alpha_0}\,(x,y) + \alpha_0\,(y,x) + \alpha_0\overline{\alpha_0}||y||^2 = \\ &= ||x||^2 - \frac{(y,x)}{(y,y)}(x,y) - \frac{(x,y)}{(y,y)}(y,x) + \frac{(y,x)}{(y,y)}\frac{(x,y)}{(y,y)}\,||y||^2 = \\ &= ||x||^2 - \frac{\overline{(x,y)}\,(x,y)}{(y,y)} \ = \ ||x||^2 - \underbrace{\frac{|(x,y)|^2}{||y||^2}}_{>0} < ||x||^2. \end{aligned}$$

Abbildung 4.11: Graphische Lösung im $\mathbb{R}^2$

$\square$

2. **(⇒)** Es sei $x \perp y \Leftrightarrow (x,y) = 0$. Wir zeigen $||x+\alpha y|| = ||x - \alpha y||$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$.

$$||x+\alpha y||^2 = (x+\alpha y, x+\alpha y) = ||x||^2 + \underbrace{\overline{\alpha}\,(x,y) + \alpha\,(y,x)}_{=0} + \alpha\overline{\alpha}||y||^2$$
$$||x-\alpha y||^2 = (x-\alpha y, x-\alpha y) = ||x||^2 - \underbrace{\overline{\alpha}\,(x,y) - \alpha\,(y,x)}_{=0} + \alpha\overline{\alpha}||y||^2$$

$$\Rightarrow ||x+\alpha y||^2 = ||x-\alpha y||^2, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}.$$

(⇐) *Indirekt:* Angenommen $x \not\perp y$. Dann gibt es ein $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ mit $||x + \alpha_0\, y|| \neq ||x - \alpha_0\, y||$.
Graphische Lösung im $\mathbb{R}^2$, vgl Abb. 4.11.
Beweis: Es sei $\alpha_0 := -\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$. Dann gilt

$$||x+\alpha_0 y||^2 = ||x||^2 - \frac{|(x,y)|^2}{||y||^2};$$

$$\begin{aligned} ||x-\alpha_0 y||^2 &= ||x||^2 + \frac{(y,x)}{(y,y)}(x,y) + \frac{(x,y)}{(y,y)}(y,x) + \frac{(y,x)}{(y,y)}\frac{(x,y)}{(y,y)}\,||y||^2 = \\ &= ||x||^2 + 3\,\frac{|(x,y)|^2}{||y||^2}; \end{aligned}$$

und falls $(x,y) \neq 0$ ist $||x+\alpha_0 y||^2 \neq ||x-\alpha_0 y||^2$. $\square$

Lösung 4.3.9 $V = M + M^\perp$, $x \in V$ hat die *eindeutige Darstellung*

$$x = u + v, \quad u \in M,\ v \in M^\perp;$$

$$P: \begin{array}{l} V \to M \\ x \mapsto u \end{array} \qquad Q: \begin{array}{l} V \to M^\perp \\ x \mapsto v \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} P^2(x) = P\left(P(x)\right) = P(u) = u = P(x), & \forall\, x \in V & \Rightarrow \quad P^2 = P, \\ Q^2(x) = Q\left(Q(x)\right) = Q(v) = v = Q(x), & \forall\, x \in V & \Rightarrow \quad Q^2 = Q, \\ Q(x) = v = x - u = (I - P)\,x, & \forall\, x \in V & \Rightarrow \quad Q = I - P. \end{array}$$

Analog zeigt man: $P \cdot Q = Q \cdot P = 0$.

Lösung 4.3.10 $D = 0 \Leftrightarrow (x,x)\cdot(y,y) - (x,y)\cdot(y,x) = 0 \Leftrightarrow$ $||x|| \cdot ||y|| = |(x,y)|$. Daher genügt es zu zeigen:

$$(x,x)\cdot(y,y) = (x,y)^2 \Leftrightarrow x, y \text{ linear abhängig}$$

(⇐) Seien x, y linear abhängig, d.h., $y = \alpha\, x \quad \Rightarrow$
$(x,x)\cdot(\alpha\, x, \alpha\, x) = \alpha^2\,(x,x)^2 = (x, \alpha\, x)^2$.

(⇒) Im Fall $(x,x) = 0$ ist nichts zu beweisen. Sei also $(x,x) \neq 0$. Es gilt:

$$\left(y - \frac{(x,y)}{(x,x)} \cdot x, y - \frac{(x,y)}{(x,x)} \cdot x\right) = (y,y) - \frac{(x,y)^2}{(x,x)} - \frac{(x,y)^2}{(x,x)} + \frac{(x,y)^2}{(x,x)} = 0$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{(x,y)}{(x,x)} \cdot x \ \Rightarrow\ x, y \text{ sind linear abhängig.} \qquad \square$$

Lösung 4.3.11 Es ist zu zeigen: l^2 ist ein *Vektorraum*, der in einer durch ein *inneres Produkt* definierten Norm *vollständig* ist.

Vektorraum:

- $x \in l^2 \ \Rightarrow\ \lambda x \in l^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$, leicht.
- $x \in l^2, y \in l^2 \ \Rightarrow\ x + y \in l^2$

  Es gilt $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \ &\leq\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \\ &\leq\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \\ &\leq\ ||x||_2^2 + 2\,||x||_2 \cdot ||y||_2 + ||y||_2^2. \end{aligned}$$

  Übergang $n \to \infty$ liefert das Resultat.

Inneres Produkt: $(x,y) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_i y_i$

Es gilt $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2} \leq ||x|| \cdot ||y||.$

Übergang $n \to \infty$ liefert das Resultat $(x,y) < \infty, \ \forall\, x, y \in l^2$.

Die Eigenschaften der Inneren Produkts sind trivialerweise erfüllt.

Vollständigkeit: Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nj}, \ldots)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in l^2, d.h., $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N(\varepsilon)$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_{ni} - x_{mi})^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall\, n, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow$$

für festes $i \in \mathbb{N}$: $\quad |x_{ni} - x_{mi}| \leq \varepsilon, \ \forall\, n, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow$

$\{x_{in}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{in} = x_i, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$.

Wir definieren $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ und zeigen: $x \in l^2$ und $x_m \to x$ für $m \to \infty$ in l^2.

Es gilt $\sum\limits_{i=1}^{N} (x_{ni} - x_{mi})^2 \leq \varepsilon^2$. Für $n \to \infty$ folgt

$$\sum_{i=1}^{N} (x_{ni} - x_{mi})^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall\, N \geq N(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{mi})^2 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow$$

$$y_m := x - x_m \quad \text{erfüllt} \quad y_m \in l^2 \Rightarrow$$

$$x = y_m + x_m \in l^2 \ \text{ und } \ ||x - x_m||_2 = ||y_m||_2 \to 0 \quad \text{für } m \to \infty.$$

Lösung 4.3.12 Es sei $X = l^2 = \{a = (a_1, a_2, \ldots), \ a_i \in \mathbb{R}; \ \|a\|_2 < \infty\}$, wobei $\|a\|_2 = \sqrt{(a,a)} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2}$.

$\left(X, (a,b) := \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right)$ ist ein Hilbertraum.

Es sei

$$M = \{u := \alpha a + \beta b, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

wobei

$$a = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right), \qquad b = \left(0, 0, 1, 0, 0, \ldots\right).$$

M ist ein abgeschlossener Unterraum von X. Für

$$c = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right) \notin M$$

soll eine orthogonale Projektion $c^* = Pc$ auf M bestimmt werden.

1. Möglichkeit: Nach der Theorie muß für $c^* := \alpha^* a + \beta^* b$ gelten,

$$c - c^* \perp u,\ \forall u \in M \qquad \Leftrightarrow \qquad (c - c^*, u) = 0,\ \forall u \in M. \tag{4.1}$$

Da M zweidimensional ist, ergibt die obige Forderung 2 lineare Gleichungen für die 2 Unbekannten α^* und β^*.

2. Möglichkeit: Der Vektor c wird in eine Fourierreihe entwickelt, wobei die Orthonormalbasis $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ so gewählt ist, daß $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ die Orthonormalbasis für M ist. Dann gilt

$$c^* = (c, \varphi_1)\varphi_1 + (c, \varphi_2)\varphi_2.$$

Lösung zu 1.: Für c^* machen wir den Ansatz

$$c^* := \alpha^* a + \beta^* b$$

mit noch unbekannten α^* und β^*, d. h.,

$$\begin{aligned} c^* &= \alpha^*\Big(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots\Big) + \beta^*\Big(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots\Big) = \\ &= \left(\alpha^*,\ \frac{\alpha^*}{2},\ \frac{\alpha^*}{3} + \beta^*,\ \frac{\alpha^*}{4},\ \frac{\alpha^*}{5},\ \dots\right) \ \Rightarrow \\ c - c^* &= \left(1 - \alpha^*,\ -\frac{1}{2} - \frac{\alpha^*}{2},\ \frac{1}{3} - \frac{\alpha^*}{3} - \beta^*,\ -\frac{1}{4} - \frac{\alpha^*}{4},\ \frac{1}{5} - \frac{\alpha^*}{5},\ \dots\right). \end{aligned}$$

Es sei $u = \alpha a + \beta b = \left(\alpha,\ \frac{\alpha}{2},\ \frac{\alpha}{3} + \beta,\ \frac{\alpha}{4},\ \frac{\alpha}{5},\ \dots\right)$. Dann ist die Bedingung (4.1) gleichbedeutend mit

$$(c - c^*, u) = (c - c^*, \alpha a + \beta b) = \sum_{i=1}^{\infty}(c - c^*)_i(\alpha a + \beta b)_i = 0,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$(1 - \alpha^*)\,\alpha + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\alpha^*}{2}\right)\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha^*}{3} - \beta^*\right)\left(\frac{\alpha}{3} + \beta\right) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{4} - \frac{\alpha^*}{4}\right)\frac{\alpha}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{\alpha^*}{5}\right)\frac{\alpha}{5} + \dots = 0,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

1. $\beta\left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha^*}{3} - \beta^*\right) = 0, \quad \forall \beta \in \mathbb{R};$

   Für $\beta = 1$ haben wir somit $\beta^* = \frac{1}{3} - \frac{\alpha^*}{3}$.

2. $\alpha\left[(1-\alpha^*)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha^*}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-\frac{\alpha^*}{4}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-\frac{\alpha^*}{5}\right)+\cdots\right]=0,$
$\forall\alpha\in\mathbb{R}$; Für $\alpha=1$ muß also

$$
\begin{aligned}
&(1-\alpha^*)\left(1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)+\\
+\ &(-1-\alpha^*)\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots\right)=0
\end{aligned}
$$

sein, d. h.

$$
(1-\alpha^*)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^2}+(-1-\alpha^*)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i)^2}=(1-\alpha^*)\cdot\frac{1}{9}\ \Leftrightarrow
$$

$$
\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i^2}}_{=\frac{\pi^2}{12}}-\alpha^*\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}}=(1-\alpha^*)\cdot\frac{1}{9}\ \Leftrightarrow
$$

$$
\alpha^*=\frac{3\pi^2-4}{2(3\pi^2-2)},\qquad \beta^*=\frac{1}{3}-\frac{3\pi^2-4}{6(3\pi^2-2)}.
$$

Daraus folgt

$$
c^*=\alpha^*a+\beta^*b=\frac{1}{3}b+\frac{3\pi^2-4}{6(3\pi^2-2)}(3a-b). \tag{4.2}
$$

Bemerkung: Die Summen der beiden Reihen wurden wie folgt ermittelt. Entwickelt man die 2π-periodische Funktion $x^2,\ x\in[-\pi,\pi]$ in ihre trigonometrische Fourierreihe, so ergibt sich

$$
x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx,
$$

wobei punktweise Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$ vorliegt. Damit ist die Auswertung an den Stellen $x=0$ bzw. $x=\pi$ gerechtfertigt:

$$
\begin{aligned}
x=0 \quad&\Rightarrow\quad 0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{\pi^2}{12},\\
x=\pi \quad&\Rightarrow\quad \pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}
$$

Lösung zu 2.: Wegen $\|b\|_2=1$ wählen wir als erstes Element einer Orthonormalbasis von M den Vektor $\varphi_1=b$. Mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens bestimmt man den Vektor $\hat{\varphi}_2=b-3a\in M$, der orthogonal zu φ_1 ist. Wir berechnen

$$
\|\hat{\varphi}_2\|_2^2=\sum_{i=1}^{\infty}(b-3a)_i=9\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}-1=\frac{3\pi^2}{2}-1.
$$

Damit ist die ONB von M

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} \;=\; \Big\{b,\, (b-3a)/\sqrt{3\pi^2/2-1}\Big\}.$$

Wir berechnen die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
(c,\varphi_1) &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\varphi_1)_i = c_3 = \frac{1}{3},\\
(c,\varphi_2) &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\varphi_2)_i = \frac{1}{\sqrt{3\pi^2/2-1}}\left(\frac{1}{3} + 3\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i^2}\right) =\\
&= \frac{1}{\sqrt{3\pi^2/2-1}}\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
c^* &= (c,\varphi_1)\varphi_1 + (c,\varphi_2)\varphi_2 = \frac{1}{3}b + \frac{2}{3\pi^2-2}\left(\frac{4-3\pi^2}{12}\right)(b-3a) =\\
&= \frac{1}{3}b + \frac{3\pi^2-4}{6(3\pi^2-2)}(3a-b),
\end{aligned}$$

vgl. (4.2).

Lösung 4.3.13 (a) Sei $V = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \text{ stetig}\}$ und $M = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \text{ konstant}\}$. M ist abgeschlossener linearer Teilraum von $L^2[a,b]$. Daher gilt

$$\inf_{c\in M} ||f-c||_{L^2} = ||f-c^*||_{L^2}$$

wobei c^* jene konstante Funktion ist, für die

$$f - c^* \;\perp\; g, \quad \forall\, g \in M$$

gilt. Das heißt:

$$0 = \int_a^b \Big(f(x) - c^*\Big) \underbrace{g(x)}_{\substack{\equiv g\\ (\text{da } g\in M)}} dx = g\int_a^b \Big(f(x)-c^*\Big)dx \Leftrightarrow c^* = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

(b) $\inf\limits_{c\in M} ||f-c||_\infty$ ist zu untersuchen.

Da f stetig ist auf dem kompakten Intervall $[a, b]$, nimmt f dort ein Maximum und ein Minimum an. Damit ist

$$\inf_{c \in M} ||f - c||_\infty > \inf_{c \in M} \Big\{ \max\{ |\max_{[a,b]} f - c|,\ |\min_{[a,b]} f - c| \} \Big\}.$$

c muß also so bestimmt werden, daß $|\max\limits_{[a,b]} f - c| = |\min\limits_{[a,b]} f - c|$ gilt. Also, $\tilde{c} = \frac{1}{2} \Big(\max\limits_{[a,b]} f(x) + \min\limits_{[a,b]} f(x) \Big)$, siehe Abb. 4.12.

Abbildung 4.12: Die Bestapproximierende $\tilde{c}$ für f bezüglich der $|| \cdot ||_\infty$–Norm

(c) (1) $$c^* = \frac{\int_0^1 e^x \, dx}{1} = e - 1 \approx 1.718.$$

(2) $$\tilde{c} = \frac{1}{2} \Big(\max_{[0,1]} e^x + \min_{[0,1]} e^x \Big) = \frac{1}{2}(e + 1) \approx 1.859.$$

Lösung 4.3.14 Das Gram–Schmidt'sche Verfahren lautet:
Gegeben seien die Vektoren b_n. Man konstruiere die paarweise orthogonalen Vektoren a_n durch

$$\begin{aligned} a_1 &:= b_1, \\ a_{n+1} &:= b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b_{n+1}, a_k)}{(a_k, a_k)} \cdot a_k, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

und normiere diese dann.

Hier sind $b_i = x^{i-1}, \quad i \in \mathbb{N}$.

Wir werden oft benötigen:

$$\left.\begin{aligned} I(n) &= \int\limits_0^\infty x^n\, e^{-x}\, dx = \Big[\underbrace{-x^n\, e^{-x}}_{=0}\Big]_0^\infty + n \int\limits_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x}\, dx = n \cdot I(n-1) \\ I(0) &= \int\limits_0^\infty e^{-x}\, dx = 1 \end{aligned}\right\} \overset{\text{Vollst. Ind.}}{\Rightarrow}$$

$$I(n) = n!$$

$a_1 = 1,$

$$||a_1|| = \sqrt{(a_1, a_1)} = \left(\int\limits_0^\infty e^{-x}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1;$$

$a_2 = x - \dfrac{(x,1)}{(1,1)} \cdot 1,$

$(x,1) = \displaystyle\int\limits_0^\infty x\, e^{-x}\, dx = 1! = 1, \quad (1,1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, dx = 1 \Rightarrow$

$a_2 = x - 1,$

$$\begin{aligned} ||a_2|| &= \sqrt{(a_2, a_2)} = \sqrt{(x-1, x-1)} = \left(\int\limits_0^\infty (x^2 - 2x + 1)\, e^{-x}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (2! - 2 \cdot 1! + 1!)^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$a_2 = x - 1;$

$a_3 = x^2 - \dfrac{(x^2,1)}{(1,1)} \cdot 1 - \dfrac{(x^2, x-1)}{(x-1, x-1)} \cdot (x-1),$

$(x^2,1) = \displaystyle\int\limits_0^\infty x^2\, e^{-x}\, dx = 2, \quad (x^2, x-1) = \int\limits_0^\infty (x^3 - x^2)\, e^{-x}\, dx = 3! - 2! = 4 \Rightarrow$

$a_3 = x^3 - 2 - 4(x-1) = x^2 - 4x + 2,$

$$\begin{aligned} ||a_3|| &= \sqrt{(x^2 - 4x + 2, x^2 - 4x + 2)} = \left(\int\limits_0^\infty (x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 4)\, e^{-x}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (4! - 8 \cdot 3! + 20 \cdot 2! - 16 + 4)^{\frac{1}{2}} = (24 - 48 + 40 - 16 + 4)^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$a_3 = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{2}.$

Lösung 4.3.15 Die Orthonormierung von $\{1, x\}$ bezüglich des Skalarproduktes

$$(f, g) := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

in $L^2([0,1])$ ergibt (vgl. Skriptum):

$$\{1, x\} \mapsto \Big\{p_0(x) = 1,\ p_1(x) = \sqrt{3}\,\Big(2x - 1\Big)\Big\}$$

mit $(p_0, p_0) = (p_1, p_1) = 1,\ (p_0, p_1) = 0.$

Die Lösung des gegebenen Minimierungsproblems

$$\Big\|e^x - (\alpha x + \beta)\Big\|^2_{L^2([0,1])} = \Big(e^x - (\alpha x + \beta), e^x - (\alpha x + \beta)\Big) \to \ \text{Min}$$

ist durch diejenige Koeffizienten α, β gegeben, für die die Funktion $\alpha x + \beta$ genau die *Orthogonalprojektion* der Funktion e^x in den von $\{1, x\}$ bzw. $\{p_0(x), p_1(x)\}$ aufgespannten linearen Unterraum von $L^2([0,1])$ darstellt. Diese ist gegeben durch

$$\Big(e^x, p_0(x)\Big)p_0(x) + \Big(e^x, p_1(x)\Big)p_1(x)$$

(da $\{p_0, p_1\}$ orthonormiert).

Berechnung von α, β:

$$\begin{aligned}
\Big(e^x, p_0(x)\Big) &= (e^x, 1) = \int_0^1 e^x\, dx = e - 1, \\
\Big(e^x, p_1(x)\Big) &= \Big(e^x, \sqrt{3}(2x-1)\Big) = 2\sqrt{3}\int_0^1 xe^x\, dx - \sqrt{3}\int_0^1 e^x\, dx = \\
&= 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,(e - 1) = \sqrt{3}\,(3 - e).
\end{aligned}$$

Daher,

$$\begin{aligned}
\alpha x + \beta &= (e - 1)\, p_0(x) + \sqrt{3}\,(3 - e)\, p_1(x) = \\
&= e - 1 + \sqrt{3}\,(3 - e)\,\sqrt{3}\,(2x - 1) = \\
&= \underbrace{6(3 - e)}_{\alpha}\, x + \underbrace{2(2e - 5)}_{\beta}.
\end{aligned}$$

4.4 Fourierreihen im Raum $L^2(a,b)$

Lösung 4.4.1 (a) Die Funktion der Rechtecksschwingung, siehe Abb. 4.13, ist ungerade, $f(x) = -f(-x)$, d.h.,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad a_n = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

und

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{1}{n}\cos nx\Big)\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \Rightarrow \\ f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi}\,\sin((2n-1)x). \end{aligned}$$

Abbildung 4.13: Die Rechtecksschwingung

(b) (i) Da an den Sprungstellen $x_i = i\pi,\ i \in \mathbb{Z}$,

$$f(x_i) = \frac{1}{2}\Big[f(x_i+0) + f(x_i-0)\Big]$$

gilt und in jedem Punkt die links– und rechtsseitige Ableitung existiert, konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen $f(x)$ überall in $\mathbb{R}$.

(ii) Gleichmäßige Konvergenz in jedem kompakten Teilintervall von $(n\pi, (n+1)\pi),\ n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Konvergenz im Quadratmittel nach Konstruktion der Fourierreihe, wegen $f \in Ł^2([-\pi, \pi])$.

Lösung 4.4.2 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{\pi(2n-1)} \sin\Big((2n-1)x\Big), \quad \forall\, x \in \mathbb{R};$

Das Skalarprodukt auf $L^2([-\pi, \pi])$ ist durch

$$(f, g) := \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, d\mu$$

und damit die Norm durch

$$\big\|f\big\|_{L^2} := \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x)\Big)^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

definiert. Die Parseval'sche Gleichung lautet (vgl. Theorie):

$$\big\|f\big\|_{L^2}^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\right),$$

wobei in unserem Fall $a_n = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ und $b_{2n} = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, während $b_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit haben wir

$$\big\|f\big\|_{L^2}^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x)\Big)^2 d\mu = \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2n-1)}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

Lösung 4.4.3 (a) Die Funktion ist ungerade, d.h., $a_n = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ und

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2},$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\, \sin\frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{2}{2}\int\limits_{0}^{2} x\, \sin\frac{n\pi x}{2}\, dx = \\ &= \left(-\frac{2x}{n\pi}\, \cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\, \sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{n\pi}\, \cos n\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi \sin\frac{n\pi x}{2} = \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \ldots\right). \end{aligned}$$

(b) Die Funktion ist gerade, d.h., $b_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2},$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2, \\ a_n &= \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \left.\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right|_0^2 = \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - 1\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - 1\right)\cos\frac{n\pi x}{2} = \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Bemerkung: Obwohl die beiden Reihen in (a) und (b) $f(x)$ auf dem Intervall $x \in (0,2)$ darstellen, konvergiert die zweite Reihe rascher.

Lösung 4.4.4 (a) $f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad x \in (0,2) = I$

Gliedweise Differentiation liefert:

$$\tilde{f}_1(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2\,(-1)^{n-1}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) =: \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Aus $\lim_{n\to\infty} u_n(x) \neq 0$ folgt, daß $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \sim \tilde{f}_1(x)$ divergiert $\forall x \in I$. Widerspruch!

$$f_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) =: \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad x \in I;$$

$$|u_n(x)| \leq \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} = M_n, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad |u_0| = 1 = M_0 \;\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| \;\leq\; \sum_{n=0}^{\infty} M_n \;=\; 1 + \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \leq$$

$$\leq\; 1 + \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq K, \quad \forall\, x \in I.$$

Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ konvergiert, folgt nach dem Majorantenkriterium, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f_2(x)$$

gleichmäßig in jedem kompakten Teilintervall von I konvergiert. Außerdem ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $u_n(x)$ differenzierbar, d.h., formal können wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) \sim f_2'(x), \qquad x \in I,$$

bilden. Die Frage, wie diese Reihe gegen $f_2'(x) = 1,\ x \in I$ konvergiert, diskutieren wir im Punkt (b).

(b) $x = f_2(x), \quad x \in I;$

$$1 = f_2'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right), \quad x \in I.$$

Betrachten wir die Funktion $f_2(x),\ -2 < x < 2$. Dann ist ihre Ableitung $f_2'(x),\ -2 < x < 2$, die Rechtecksschwingung auf $(-2, 2)$ und die obige Summe ist die dazugehörige Fourierreihe, vgl Beispiel 4.4.1(a) für $x \in (0, 2)$. Nach Beispiel 4.4.1(b) folgt also, daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ punktweise gegen 1 für alle $x \in (0, 2)$ und gleichmäßig gegen 1 in jedem kompakten Teilintervall von $(0, 2)$ konvergiert.

(c) $x = f_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad x \in I.$

Die Funktion $f_1(t), -2 < t < 2$, ist stetig, die Punkte $a = 0$ und $x \in I$ liegen in $(-2, 2)$, deshalb kann man die Fourierreihe von f_1 gliedweise integrieren,

$$\int_0^x f_1(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\, dt$$

und die resultierende Reihe konvergiert gegen den Integralwert,

$$\begin{aligned}
\int_0^x t\,dt \quad &\sim \quad \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x u_n(t)\,dt = \\
&= \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt \Leftrightarrow \\
\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^t \quad &\sim \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \Bigg|_0^x \Leftrightarrow \\
x^2 \quad &\sim \quad \frac{-16}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + C,
\end{aligned}$$

wobei

$$C = \frac{16}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

(d) Die obige Reihe ist eine Fourierreihe für x^2,

$$x^2 \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right), \quad x \in I,$$

wobei

$$\frac{a_0}{2} = C, \quad a_n = \frac{16(-1)^n}{\pi^2 n^2}, \quad b_n = 0;$$

$$C = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} x^2\,dx = \frac{1}{4} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{16} \cdot C = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Lösung 4.4.5 (a) Für die Fourierreihe einer Funktion $f \in L^2(a,b)$ der Form

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right)\right),$$

mit den Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\frac{2k\pi x}{b-a}\,dx, \quad k \geq 0,$$

$$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2k\pi x}{b-a}\, dx, \quad k \geq 1,$$

vgl. Theorieskriptum, lautet die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_a^b (f(x))^2\, dx = \frac{b-a}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right).$$

Damit ist für

$$x = f_2(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} \right), \quad -2 \leq x \leq 2,$$

$$\|f_2\|_{L^2}^2 = \int_{-2}^{2} x^2\, dx = \frac{16}{3} = 2 \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^4} \cdot \frac{1}{(2n-1)^4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{8}{3} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^4} \cdot \frac{1}{(2n-1)^4} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

(b) $$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{2^4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi^4}{90}.$$

Lösung 4.4.6 Die Fourierreihe ist

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right),$$

wobei

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, & n \geq 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, & n > 0. \end{aligned}$$

Berechnung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{2}{\pi} \sinh \pi, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^x (\cos nx + n \sin nx)}{n^2+1} \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(-1\Big)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)} = \Big(-1\Big)^n \frac{2\sinh\pi}{\pi(n^2+1)}, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^x(\sin nx - n\cos nx)}{n^2+1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \\
&= \Big(-1\Big)^{n+1} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)} \cdot n = -\Big(-1\Big)^n \frac{2\,n\,\sinh\pi}{\pi(n^2+1)}.
\end{aligned}
$$

Daher gilt

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{\sinh\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n\,\sinh\pi}{\pi(n^2+1)}\cos nx - \frac{2n(-1)^n\,\sinh\pi}{\pi(n^2+1)}\sin nx\right) = \\
&= \frac{\sinh\pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\Big(\cos nx - n\sin nx\Big)\right).
\end{aligned}
$$

Lösung 4.4.7 $f(x) = x^2,\ x \in [\,0, 2\pi\,)$, siehe Abb. 4.14.

Abbildung 4.14: Die Funktion $f(x) = x^2,\ 0 \le x < 2\pi$, periodisch fortgesetzt

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,; \\
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2\, dx = \frac{8\pi^2}{3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2\,\cos nx\,dx = -\frac{4}{n^2}, \quad n\in\mathbb{N},\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2\,\sin nx\,dx = -\frac{4\pi}{n}, \quad n\in\mathbb{N},
\end{aligned}
$$

d.h., $$f(x)\sim \frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right).$$

(i) Wegen $f\in L^2([0,2\pi)$ konvergiert die Reihe im Quadratmittel gegen f.

(ii) Für alle $x\in(2\pi m, 2\pi(m+1))$, $m\in\mathbb{Z}$ punktweise Konvergenz; für $x=2\pi m$ Konvergenz gegen $2\pi^2=\frac{1}{2}\left((2\pi)^2+0\right)$.

(iii) Keine gleichmäßige Konvergenz, da f nicht stetig im $\mathbb{R}$; auf jedem kompakten Teilintervall von $(2\pi m, 2\pi(m+1))$ liegt jedoch gleichmäßige Konvergenz vor.

Lösung 4.4.8

$$f(x)=\begin{cases} c_1, & -\pi<x<0,\\ \frac{c_1+c_2}{2}, & x=-\pi,0,\pi,\\ c_2, & 0<x<\pi;\end{cases}$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

mit

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = c_1+c_2,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos nx\,dx = 0, \quad \forall\, n\in\mathbb{N},\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin nx\,dx = \frac{1}{n\pi}\Big(c_1-c_2\Big)\Big((-1)^n-1\Big) =\\
&= \begin{cases} 0, & n \text{ gerade},\\ -\frac{2}{n\pi}\Big(c_1-c_2\Big), & n \text{ ungerade}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

D.h.,

$$f(x) \sim \frac{c_1+c_2}{2} - \frac{2}{\pi}\Big(c_1-c_2\Big)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)x,$$

bzw. für $c_1=c_2=c$

$$f(x)\sim c.$$

(i) Die Reihe konvergiert im Quadratmittel gegen f, da $f\in L^2([-\pi,\pi])$.

(ii) Die Reihe konvergiert punktweise gegen $f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(iii) Für $c_1\neq c_2$ gleichmäßige Konvergenz auf jedem kompakten Teilintervall von $(\pi m,\pi(m+1)),\ m\in\mathbb{Z}$; für $c_1=c_2=c$ gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{R}$.

Lösung 4.4.9 $f(x)=|\sin x|,\ x\in[0,2\pi)$, siehe Abb. 4.15.

Abbildung 4.15: Die Funktion $f(x)=|\sin x|,\ 0\le x<2\pi$

Da die Funktion $f(x)$ π–periodisch ist, kann man sie in die Fourierreihe der Form

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx)$$

entwickeln. Dabei gilt

$$a_0 = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \int_0^\pi \sin x \, \cos 2nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Big(\frac{1}{2} \sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x\Big) \, dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)} + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)} \right] \Bigg|_0^\pi = \frac{4}{\pi(4n^2-1)}, \quad \forall \, n \in \mathbb{N}, \\
b_n &= \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \int_0^\pi \sin nx \, \sin 2nx \, dx = 0, \quad \forall \, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

D.h.,

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos 2nx.$$

(i) Konvergenz im Quadratmittel, da $f \in L^2([0,\pi])$.

(ii) Punktweise Konvergenz im $\mathbb{R}$.

(iii) Gleichmäßige Konvergenz im $\mathbb{R}$.

Lösung 4.4.10 $f(x)$ ist eine ungerade Funktion und läßt sich daher in eine Sinus–Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned}
a_n &= 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \\
b_n &= \int_{-1}^{1} f(x) \sin(n\pi x) \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Also mittels partieller Integration,

$$\begin{aligned}
b_n &= 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) \, dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^1 \underbrace{(1-x)}_{u} \underbrace{\sin(n\pi x)}_{v'} \, dx = \\
&= \pi \underbrace{(1-x)}_{u} \underbrace{\left(\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \right)}_{v} \Bigg|_0^1 - \pi \int_0^1 \underbrace{(-1)}_{u'} \underbrace{\left(\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \right)}_{v} dx = \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \cos(n\pi x) \, dx.
\end{aligned}$$

Mit der Transformation $t := n\pi x$ ergibt sich

$$b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \frac{1}{n\pi} \int_0^{n\pi} \cos t \, dt = \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{1}{n^2\pi} \sin t \Bigg|_0^{n\pi}}_{=0}, \; n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi x).$$

Siehe Abb. 4.16.

Abbildung 4.16: Die Funktion $f(x)$ und die ersten drei Partialsummen ihrer trigonometrischen Fourierreihe

Lösung 4.4.11 $f(x)$ ist ungerade $\;\Rightarrow\; a_n = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin \omega x\, \sin nx\, dx,$$

wobei $\sin \omega x\, \sin nx = \frac{1}{2}\Big(\cos(\omega - n)x - \cos(\omega + n)x\Big) \Rightarrow$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \Big(\cos(\omega - n)x - \cos(\omega + n)x\Big)\, dx.$$

Mit der Transformation $t := (\omega \pm n)x$ ergibt sich

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\omega - n)\pi}{\omega - n} - \frac{\sin(\omega + n)\pi}{\omega + n} \right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n \sin\omega\pi}{\omega-n} - \frac{(-1)^n \sin\omega\pi}{\omega+n}\right) = \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\,\frac{2n}{\omega^2-n^2}\,\sin\omega\pi, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\
f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\pi}\,\frac{2n}{\omega^2-n^2}\right)\sin\omega\pi\,\sin nx.
\end{aligned}
$$

Bemerkungen: Man beachte, daß die 2π–periodische Fortsetzung der Funktion $\sin\omega$ über das Intervall $[-\pi,\pi]$ hinaus *nicht stetig* ist. Daraus erklärt sich auch die Tatsache, daß die Fourierkoeffizienten b_n asymptotisch für $n\to\infty$ nur relativ langsam (nämlich wie $\frac{1}{n}$) abklingen, vgl. dazu die Aussage von Beispiel 4.4.15.

Abgesehen vom asymptotischen Verhalten der b_n für $n\to\infty$ sieht man, daß für $n<|\omega|$ die b_n zunächst *anwachsen*; speziell falls $|\omega|$ sehr nahe an einen Wert $n\in\mathbb{N}$ liegt, kann sich für dieses n ein sehr großer Wert $|b_n|$ ergeben! Erst für $n \gg |\omega|$ kommt man in den Bereich des asymptotischen Abklingens gemäß $\left|\dfrac{n}{\omega^2-n^2}\right| \approx \dfrac{1}{n}$.
Die für wachsende $|\omega|$ immer stärker ausgeprägte „Unglattheit“ von f (immer stärkere Oszillation) kommt also dadurch zum Ausdruck, daß für immer größere $n\approx|\omega|$ die $|b_n|$ sehr groß werden und die Fourierreihe *„immer später zu konvergieren beginnt“*.

Lösung 4.4.12 Gerade Fortsetzung: $\varphi(t)=\varphi(-t)$, φ ist 2π–periodisch, siehe Abb. 4.17.

Trigonometrische Cosinus–Fourierreihe:

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

mit

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\,\cos nt\,dt = \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\alpha t}\,\cos nt\,dt.
\end{aligned}
$$

Zwei mal partiell integrieren ergibt

$$\int_0^{\pi} \underbrace{e^{\alpha t}}_{u'}\underbrace{\cos nt}_{v}\,dt = \underbrace{\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}}_{u}\underbrace{\cos nt}_{v}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\underbrace{\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}}_{u}\underbrace{n\,\sin nt}_{v'}\,dt =$$

Abbildung 4.17: Die Funktion $e^{\alpha t}$, gerade fortgesetzt

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha}\Big((-1)^n e^{\alpha\pi} - 1\Big) + \frac{n}{\alpha}\int_0^\pi \underbrace{e^{\alpha t}}_{u'}\underbrace{\sin nt}_{v}\,dt = \\
&= \frac{1}{\alpha}\Big((-1)^n e^{\alpha\pi} - 1\Big) + \\
&+ \frac{n}{\alpha}\left(\underbrace{\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}}_{u}\underbrace{\sin nt}_{v}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}}_{u}\underbrace{n\cos nt}_{v'}\,dt\right) = \\
&= \frac{1}{\alpha}\Big((-1)^n e^{\alpha\pi} - 1\Big) - \frac{n^2}{\alpha^2}\int_0^\pi e^{\alpha t}\,\cos nt\,dt \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\left(1 + \frac{n^2}{\alpha^2}\right)\int_0^\pi e^{\alpha t}\,\cos nt\,dt = \frac{(-1)^n e^{\alpha\pi} - 1}{\alpha} \Rightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+\frac{n^2}{\alpha^2}}\,\frac{(-1)^n e^{\alpha\pi} - 1}{\alpha} = \frac{2}{\alpha\pi}\,\frac{\alpha^2}{\alpha^2+n^2}\,\frac{(-1)^n e^{\alpha\pi} - 1}{\alpha} = \\
&= \frac{2}{\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+n^2}\,\left((-1)^n e^{\alpha\pi} - 1\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}
$$

Ungerade Fortsetzung: $\varphi(t) = -\varphi(-t)$, φ ist 2π–periodisch, siehe Abb. 4.18.

Trigonometrische Sinus–Fourierreihe:

$$
\varphi(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\sin nt
$$

Abbildung 4.18: Die Funktion $e^{\alpha t}$, ungerade fortgesetzt

mit

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} e^{\alpha t}\,\sin nt\,dt.$$

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\pi \underbrace{e^{\alpha t}}_{u'}\underbrace{\sin nt}_{v}\,dt &= \underbrace{\frac{1}{\alpha}\,e^{\alpha t}}_{u}\underbrace{\sin nt}_{v}\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \underbrace{\frac{1}{\alpha}\,e^{\alpha t}}_{u}\underbrace{n\,\cos nt}_{v'}\,dt = \\
&= -\frac{n}{\alpha}\int\limits_0^\pi e^{\alpha t}\,\cos nt dt = \\
&= \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{1-(-1)^n\,e^{\alpha\pi}}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+\frac{n^2}{\alpha^2}},
\end{aligned}$$

also

$$b_n = \frac{2}{\pi}\frac{n}{\alpha^2+n^2}\Big(1-(-1)^n\,e^{\alpha\pi}\Big), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Man sieht, daß asymptotisch für $n \to \infty$ die a_n wie $1/n^2$ und die b_n wie $1/n$ abklingen; die Cosinus–Reihe der stetig fortgesetzten Funktion konvergiert also schneller, vgl. dazu auch Beispiel 4.4.15.

Lösung 4.4.13 $f(x) \in L^2[(-\pi,\pi)] \Rightarrow \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big),$

siehe Abb. 4.19.

Abbildung 4.19: Die Funktion $f(x),\ -\pi < x < \pi$

1. $f(x) = -f(-x) \quad \Rightarrow \quad a_n = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$

2. $b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} (-\cos x)\, \sin nx\, dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \cos x \sin nx\, dx.$

   Führt man im ersten Integral die Transformation $x \mapsto -x$ durch, so sieht man, daß die beiden Integrale identisch sind, d.h.,

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \underbrace{\cos x}_{u'}\, \underbrace{\sin nx}_{v}\, dx = \\
&= \frac{2}{\pi}\, \underbrace{\sin x}_{u}\, \underbrace{\sin nx}_{v} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \underbrace{\sin x}_{u}\, \underbrace{n \cos nx}_{v'}\, dx = \\
&= -\frac{2n}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \underbrace{\sin x}_{u'}\, \underbrace{\cos nx}_{v}\, dx = \\
&= -\frac{2n}{\pi}\, \underbrace{(-\cos x)}_{u}\, \underbrace{\cos nx}_{v} \Big|_0^{\pi} + \frac{2n}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \underbrace{(-\cos x)}_{u}\, \underbrace{(-n \sin nx)}_{v'}\, dx = \\
&= \frac{2n}{\pi} \Big((-1)\, \cos n\pi - 1 \Big) + \frac{2n^2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos x\, \sin nx\, dx =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2n}{\pi}\Big(-(-1)^n - 1\Big) + n^2\, b_n \Leftrightarrow \\
b_n &= -\frac{2n}{\pi}\Big(1 + (-1)^n\Big) + n^2\, b_n
\end{aligned}
$$

und deshalb

$$
b_n = -\frac{2n}{\pi} \cdot \frac{1+(-1)^n}{1-n^2} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\dfrac{n}{n^2-1}, & n \text{ gerade}, \\ 0, & n \text{ ungerade}. \end{cases}
$$

Also

$$
f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{1\cdot 3}\,\sin 2x + \frac{4}{3\cdot 5}\,\sin 4x + \frac{6}{5\cdot 7}\,\sin 6x + \ldots\right).
$$

Lösung 4.4.14 Die Funktion $f(x)$ im Beispiel 4.4.13 hat sogar die Periode π und kann daher (als ungerade Funktion) folgendermaßen entwickelt werden (Grundintervall $[\,-\pi/2,\,\pi/2\,]$):

$$
f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n\, \sin\left(\frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n\, \sin(2nx) = \tilde{b}_1 \sin 2x + \tilde{b}_2 \sin 4x + \ldots
$$

Vergleich mit der Entwicklung zur Periode 2π,

$$
f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \sin nx
$$

ergibt $b_n = 0$, falls n ungerade, $b_n = b_{2k} = \tilde{b}_n$, falls n gerade.

Lösung 4.4.15 Die *komplexe* Darstellung der trigonometrischen Fourierreihe einer 2π–periodischen reellwertigen Funktion $f \in L^2([-\pi,\pi])$ lautet

$$
f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}, \quad i = \sqrt{-1}\ ,
$$

mit

$$
c_n = \overline{c}_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.
$$

Es ist $|c_n|^2 = |c_{-n}|^2 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$, wobei a_n, b_n die Fourierkoeffizienten in der reelen Darstellung sind.

Zu zeigen ist also

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \right| = O\left(\frac{1}{|n|^{m+1}} \right)$$

für m mal stetig differenzierbares f, wenn $f^{(m+1)}$ noch stückweise stetig ist. Partielle Integration ergibt

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{u} \underbrace{e^{-inx}}_{v'} dx = f(x) \cdot \frac{e^{-inx}}{-in} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx}\, dx,$$

wobei

$$f(x) \cdot \frac{e^{-inx}}{-in} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{-in} \Big(f(\pi)\, e^{-in\pi} - f(-\pi) e^{in\pi} \Big) = 0,$$

wegen

- ▷ f ist 2π–periodisch und stetig $\Rightarrow$ $f(\pi) = f(-\pi)$,
- ▷ $e^{-inx} = e^{in\pi} = \cos n\pi$.

Also

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(in)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\, e^{-inx}\, dx = \ldots = \frac{1}{(in)^{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\, e^{-inx}\, dx,$$

woraus unmittelbar die gewünschte Abschätzung folgt.

Bemerkungen:

- Man sieht im Beweis, daß die Stetigkeit der $(m+1)$–ten Ableitung nicht benötigt wird.
- Für beliebig oft differenzierbares f kann man folgern, daß die Fourierkoeffizienten asymptotisch für $n \to \infty$ *schneller als jede negative Potenz von* n, also etwa *exponentiell* abklingen.
- Die Aussage ist nicht „scharf“, vgl. etwa das Beispiel der stetigen Sägezahnfunktion aus dem Skriptum.

Lösung 4.4.16 Für $x \neq 0$ gilt $g(x) = f'(x)$, und daher erhält man die Fourierreihe von g durch gliedweise Differentiation aus der Fourierreihe von f:

$$\begin{aligned} g(x) &\sim \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right) = \\ &= -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} -(2n-1)\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}. \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert langsamer als die Reihe für $f(x)$, g hat eine Unstetigkeitsstelle, und die Konvergenz ist nicht gleichmäßig in $\mathbb{R}$.

Lösung 4.4.17 Anwendung der *Parseval'schen Gleichung* auf die beiden Fourierreihen aus Beispiel 4.4.16 :

(1) Für die Funktion $g(x)$ gilt

$$\|g\|_{L^2}^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g^2(x)\,dx = 2\pi$$

und andererseits

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} g^2(x)\,dx = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right)$$

mit $a_k = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ b_{2n-1} = \dfrac{4}{\pi(2n-1)},\ n = 1, 2, \ldots$, und $b_k = 0$ für gerade k. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n-1)}\right)^2 &= 2\pi, \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

(2) Analoge Überlegung für $f(x)$ liefert

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{2\pi^3}{3},$$

andererseits, wegen $b_k = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$ und $a_k = 0$ für gerade k,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{\pi^3}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\right)^2}_{=(a_{2n-1})^2}.$$

Daraus folgt leicht

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Lösung 4.4.18 Man darf die Fourierreihe für f gliedweise integrieren, um die Fourierreihe für die Stammfunktion zu erhalten. Wir wählen 0 als untere Integrationsgrenze, d.h., wir setzen die Integrationskonstante gleich 0. Wir erhalten einerseits die gegebene Funktion $g(x)$,

$$\int_0^x f(t)\,dt \;=\; \frac{x^2}{4},$$

und die analoge gliedweise Integration der Fourierreihe von $f(x)$ ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n}\,dt$$

mit

$$\begin{aligned}\int_0^x (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n}\,dt \;&=\; (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2}\Bigg|_0^x = \\ &=\; (-1)^n \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Daher lautet die Fourierreihe von $g(x)$

$$g(x) \sim C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

mit dem konstanten Glied

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \;=\; ?$$

Der konstante Wert von C ist noch extra zu bestimmen; er ist natürlich gegeben durch $\dfrac{a_0}{2}$, wobei

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{12}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{6},$$

also

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \, .$$

Lösung 4.4.19 Wir betrachten die Funktion aus der Abb. 4.20.

Abbildung 4.20: Die Funktion $f(x) = 1, \; x \in (0,1)$, ungerade fortgesetzt

Als ungerade Funktion besitzt f eine Fourierreihe der Form

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\pi x$$

wobei

$$b_m = 2 \int_0^1 f(x) \sin m\pi x \, dx, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

und

$$\begin{aligned} b_m &= 2 \int_0^1 1 \cdot \sin m\pi x \, dx = \left[-\frac{2}{m\pi} \cos m\pi x \right] \Bigg|_0^1 = \\ &= \frac{2}{m\pi} \Big(1 - \cos m\pi \Big), \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(1-\cos m\pi)}{m\pi} \sin m\pi x, \qquad \forall \, x \in (0,1),$$

da diese Fourierreihe dort punktweise gegen $f(x) \equiv 1$ konvergiert.

Lösung 4.4.20 Sei $f \in L^2([-\pi,\, \pi)]$. Dann gilt

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big)$$

und die Parseval'sche Gleichung ergibt

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) \Big)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n^2 + b_n^2 \Big) < \infty. \tag{4.3}$$

Gegeben ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad b_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Da die hyperharmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}, \qquad \beta \in [0,1]$$

divergiert im Widerspruch zur Aussage (4.3), ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

keine Fourierreihe.

Lösung 4.4.21 Wegen

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \sigma_n \right) = \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \sigma_n + \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \sigma_n$$

muß für $n \geq 1$ gelten

$$\begin{aligned} a_n &= A_n \cos \sigma_n, \\ b_n &= A_n \sin \sigma_n. \end{aligned}$$

Also muß gelten $a_n^2 + b_n^2 = A_n^2$; wir wählen A_n nichtnegativ:

$$A_n = +\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \ldots \text{ Amplitude.}$$

Damit kann man σ_n z.B. ausdrücken als

$$\sigma_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \qquad \ldots \text{ Phase.}$$

$\Big($ Für $n = 0$ ist $A_0 = \dfrac{a_0}{2}$.$\Big)$

Die Fourierreihe der „Sägezahnfunktion“, $f(x) = x,\ x \in [0, 2\pi),\ 2\pi$–periodisch fortgesetzt lautet

$$f(x) \sim \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n}\right) \sin nx$$

oder in Amplituden–Phasen–Darstellung:

$$f(x) \sim \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n}\right) \cos\Big(nx - \frac{\pi}{2}\Big).$$

Bemerkung: Ähnlich wie bei der Sägezahnfunktion ist das Umschreiben auf Amplituden–Phasen–Darstellung trivial für ungerade Funktionen ($a_n \equiv 0$) oder gerade Funktionen ($b_n \equiv 0$). Nur für $a_n,\ b_n \neq 0$ kann man von einer echten „Umformung“ der Fourierreihe sprechen.

Lösung 4.4.22 Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein Orthonormalsystem in einem inneren Produktraum L über $\mathbb{R}$. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ spanne M, einen linearen Unterraum von L, auf. Dann gilt für ein festes $y \in L$ und $s \in M$

$$\|y - s\| \geq |y - f\|, \quad \text{falls} \quad f = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \varphi_k, \;\; c_k = (y, \varphi_k).$$

D.h., die n–te Partialsumme f der Fourierreihe von y approximiert y im Sinne von $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ besser als jedes andere $s \in M$.

Es gilt

$$\|y - f\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Gegeben ist: $L = L^2([0, 2]),\ M = \mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\pi x), \sin(\pi x)\right\},\ y = y(x) = x.$

Daraus folgt $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} c_k \varphi_k = c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + c_2 \cdot \cos(\pi x) + c_3 \cdot \sin(\pi x)$;

$$\begin{aligned}
c_1 &= \int_0^2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = \sqrt{2}, \\
c_2 &= \int_0^2 x \cdot \cos(\pi x)\, dx = 0, \\
c_3 &= \int_0^2 x \cdot \sin(\pi x)\, dx = \frac{-2}{\pi},
\end{aligned}$$

d.h.,

$$f = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \sin(\pi x) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\pi} \cdot \sin(\pi x).$$

Folglich,

$$\begin{aligned} \|y - f\|^2 &= \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{3} c_k^2 = \int_0^2 x^2\,dx - \left(2 + \frac{4}{\pi^2}\right) = \frac{8}{3} - 2 - \frac{4}{\pi^2} = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}, \\ \|y - f\| &= \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}}. \end{aligned}$$

Lösung 4.4.23 Das Funktionensystem $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{e^{\frac{2\pi k i}{b-a}\xi}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\xi \in [a,b]$ bildet ein ONS bezüglich des Skalarproduktes

$$(f,g) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (e_k, e_l) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{\frac{2\pi k i}{b-a}\xi} e^{-\frac{2\pi l i}{b-a}\xi}\,d\xi = \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\cdot\dfrac{b-a}{2\pi i(k-l)}\left(e^{\frac{2\pi i}{b-a}(k-l)b} - e^{\frac{2\pi i}{b-a}(k-l)a}\right), & k \neq l \\ \dfrac{1}{b-a}(b-a) = 1, & k = l. \end{cases} \end{aligned}$$

Für $k \neq l$ ist

$$\begin{aligned} e^{\frac{2\pi i}{b-a}(k-l)b} - e^{\frac{2\pi i}{b-a}(k-l)a} &= \cos\left(\frac{2\pi}{b-a}(k-l)b\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{b-a}(k-l)b\right) - \\ &- \cos\left(\frac{2\pi}{b-a}(k-l)a\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{b-a}(k-l)a\right) = \\ &= -2\sin\left(\frac{\pi}{b-a}(k-l)(b+a)\right)\sin\left(\frac{\pi}{b-a}(k-l)(b-a)\right) + \\ &+ 2i\cos\left(\frac{\pi}{b-a}(k-l)(b+a)\right)\sin\left(\frac{\pi}{b-a}(k-l)(b-a)\right) = 0, \end{aligned}$$

und damit $(e_k, e_l) = \delta_{kl}$. □

Die komplexe Fourierreihe für $f \in L^2(a,b)$ lautet dann

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2k\pi i x}{b-a}}$$

mit

$$c_k = (f, e_k) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\xi)\overline{e_k}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\xi) e^{-\frac{2k\pi i \xi}{b-a}}\, d\xi.$$

4.5 Wärmeleitungsgleichung und Sturm-Liouville-Problem

Lösung 4.5.1 Das folgende Anfangs-Randwertproblem ist zu lösen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0; \quad u(x,0) = 1.$$

Der Ansatz $u(x,t) := \Psi(t)\Phi(x)$ und die Separation der Variablen führt auf das Eigenwertproblem für Φ,

$$\Phi''(x) = \lambda\Phi(x), \qquad \Phi(0) = \Phi'(\pi) = 0, \tag{4.4}$$

und eine Differentialgleichung für $\Psi(t)$,

$$\Psi'(t) = \lambda\Psi(t). \tag{4.5}$$

Wir lösen (4.4): Mit $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$ ist

$$\Phi(x) = A\sin\mu x + B\cos\mu x$$

die Lösung der Differentialgleichung. Die Randbedingungen sind erfüllt, falls

$$\Phi(0) = B = 0 \qquad \text{und} \qquad \Phi'(\pi) = \mu A\cos(\mu\pi) = 0,\ A \neq 0$$

gilt. Damit folgt für μ

$$\mu = \mu_k := k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

und wir erhalten als Lösungsschar von (4.4)

$$\Phi_k(x) = A_k \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Konstante A_k ist noch frei und wir wählen sie, im Hinblick auf die Lösung von (4.5) so, daß $\|\Phi_k\|_2 = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\|\Phi_k\|_2^2 &= \int_0^\pi A_k^2 \sin^2\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\xi\right)\, d\xi = A_k^2 \cdot \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow \\ \|\Phi_k\|_2^2 &= |A_k| \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1 \;\Rightarrow\; |A_k| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\end{aligned}$$

Endgültig ergibt sich für die Lösung von (4.4):

$$\lambda_k = -\left(k+\frac{1}{2}\right)^2,\ k \in \mathbb{N}_0; \qquad \Phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right),\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Wir lösen (4.5): Es sei $\lambda = \lambda_k = -\left(k+\frac{1}{2}\right)^2$, dann ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\Psi_k(t) = B_k e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 t}, \qquad B_k = \text{const},$$

und damit ist

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right).$$

Die Konstanten B_k werden aus der Anfangsbedingung bestimmt:

$$u(x,0) = 1 = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right),$$

indem man die Reihe als Fourierreihe von $u(x,0) = 1$ auffaßt. Damit ist

$$B_k = (1, \Phi_k) = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{k+\frac{1}{2}}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

und

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+\frac{1}{2}} e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 t} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right).$$

Lösung 4.5.2 Zu lösen ist das Anfangs-Randwertproblem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x).$$

Mit dem Ansatz $u(x,t) = \Psi(t)\Phi(x)$ erhalten wir, analog wie im Beispiel 4.5.1,

$$\Phi''(x) = \lambda\Phi(x), \qquad \Phi(0) = \Phi(\pi) = 0, \tag{4.6}$$

und

$$\Psi''(t) = \lambda\Psi(t). \tag{4.7}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, daß die Funktionen

$$\Phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx), \quad k \in \mathbb{N}$$

das Problem (4.6) für $\lambda = \lambda_k = -k^2$ lösen. Die allgemeine Lösung von (4.7) für $\lambda = \lambda_k$ ist

$$\Psi_k(t) = A_k \sin(kt) + B_k \cos(kt),$$

womit

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx), \tag{4.8}$$

ist. Es bleibt noch die Bestimmung der Koeffizienten A_k und B_k, $k \in \mathbb{N}$. Das System $\left\{\Phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine ONB des Hilbertraumes

$$L^2_{\mathrm{RB}}(0,\pi) := \left\{\varphi(x);\ \varphi \in L^2(0,\pi) \ \text{ und } \ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0\right\}.$$

Nehmen wir an, daß $u(x,t)$ für jedes feste t in $L^2_{\mathrm{RB}}(0,\pi)$ ist, so kann man (4.8) als ihre Fourierreihe in x bezüglich des obigen Systems auffassen. Dann gilt

$$\Psi_k(t) = (u(\cdot,t), \Phi_k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi u(x,t)\sin kx\,dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Das Einsetzen in die Anfangsbedingungen liefert

$$\begin{aligned}
\Psi_k(0) &= B_k &&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi u_0(x)\sin kx\,dx, \quad k \in \mathbb{N},\\
\Psi_k'(0) &= kA_k &&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi v_0(x)\sin kx\,dx, \quad k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

d. h., B_k bzw. kA_k sind die Fourierkoeffizienten von $u_0(x)$ bzw. $v_0(x)$.

Lösung 4.5.3 $Ly := -\dfrac{p(x)}{\varrho(x)}\,y'' - \dfrac{p'(x)}{\varrho(x)}y' + \dfrac{q(x)}{\varrho(x)}\,y$

(a) (i) $L_1 y = -(x^2-1)y'' - 2xy',\ x \in [-1,1]$;
Es gilt

$$(x^2-1)' = 2x \Rightarrow p(x) = x^2-1, \quad \varrho(x) = 1, \quad q(x) = 0.$$

Aus $p \in C^1[-1,1],\ \varrho, q \in C[-1,1]$ folgt: L_1y ist Sturm–Liouville DA.
$L_1 y = \Big((1-x^2)y'\Big)'$

(ii) $L_2 y = -(x^2+1)y'' - 2xy' + y''',\ x \in [-1,1]$;
Da L_2y y''' enthält, ist L_2y kein Sturm–Liouville DA.

(b) (i) L_1y ist regulär, falls $\varrho(x) > 0,\ p(x) \neq 0,\ \forall\, x \in [-1,1]$;
Aus $p(1) = p(-1) = 0$ folgt: L_1y ist nicht regulär.

(ii) L_1y ist selbstadjungiert, falls $p(x)\Big(y_1'y_2 - y_1y_2'\Big)\Big|_{-1}^{1} = 0, \quad \forall\, y_1, y_2 \in D$,
$D = \Big\{y \in C^2[-1,1];\ y(-1) = a,\ y(1) = b\Big\}$;
Aus $p(1) = p(-1) = 0$ folgt: L_1y ist selbstadjungiert.

(iii) L_1y selbstadjungiert $\Rightarrow$ Eigenfunktionen sind orthogonal bezüglich des Skalarproduktes

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} \varrho(x) f_1(x) f_2(x) dx.$$

Aus $\varrho(x) = 1$ folgt $(f_1, f_2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f_1(x)\, f_2(x)\, dx.$

Lösung 4.5.4 Wir berechnen $\displaystyle\int_0^1 G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$:

$y(x)$ sei die Lösung des gegebenen Randwertproblems, also $-y''(\xi) = f(\xi)$, $0 < \xi < 1$ und $y(0) = y(1) = 0$. Daher

$$\int_0^1 G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \;=\; \int_0^1 G(x,\xi)\, \left(-y''(\xi)\right)\, d\xi =$$

$$= \underbrace{\int_0^x \underbrace{(1-x)\xi}_{G(x,\xi),\,\xi\le x} (-y''(\xi))\,d\xi}_{(I)} + \underbrace{\int_x^1 \underbrace{x(1-\xi)}_{G(x,\xi),\,\xi\ge x} (-y''(\xi))\,d\xi}_{(II)}.$$

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
(I) &= (x-1)\int_0^x \underbrace{\xi}_{u}\,\underbrace{y''(\xi)}_{v'}\,d\xi = (x-1)\left(\xi y'(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=x} - \int_0^x 1\cdot y'(\xi)d\xi\right) = \\
&= (x-1)\Big(xy'(x) - 0\cdot y'(0) - (y(x)-y(0))\Big) = \\
&= x^2y'(x) - xy(x) - xy'(x) + y(x). \\
(II) &= x\int_x^1 \underbrace{\xi}_{u}\,\underbrace{y''(\xi)}_{v'}\,d\xi - x\int_x^1 y''(\xi)\,d\xi = \\
&= x\left(\xi y'(\xi)\Big|_{\xi=x}^{\xi=1} - \int_x^1 1\cdot y'(x)\,d\xi\right) - x(y'(1)-y'(x)) = \\
&= x\,(y'(1) - xy'(x) - (y(1)-y(x))) - xy'(1) + xy'(x) = \\
&= xy'(1) - x^2y'(x) + xy(x) - xy'(1) + xy'(x).
\end{aligned}$$

$$(I) + (II) \;\Rightarrow\; \int_0^1 G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi = y(x).$$

Randbedingungen:

$$y(0) = (\mathcal{I}f)(0) \;=\; \int_0^1 G(0,\xi)\,f(\xi)\,d\xi;$$

$$G(0,\xi) = x(1-\xi)\Big|_{x=0}, \quad \text{wegen } x = 0 \le \xi$$

und damit $y(0) = 0$;

$$y(1) = (\mathcal{I}f)(1) \;=\; \int_0^1 G(1,\xi)\,f(\xi)\,d\xi;$$

$$G(1,\xi) = \xi(1-x)\Big|_{x=1}, \quad \text{wegen } x = 1 \ge \xi$$

und deshalb $y(1) = 0$;

d.h., der Integraloperator mit dem „Kern“ $G(x,\xi)$ löst tatsächlich das gegebene Randwertproblem. Die Funktion $G(x,\xi)$ heißt Green'sche Funktion.

Lösung 4.5.5 Gegeben $Ly := \varphi_2(x)y'' + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y, \quad \varphi_2(x) \neq 0.$
Definiere

$$p(x) := \exp\left(\int_0^x \frac{\varphi_1(\xi)}{\varphi_2(\xi)}\,d\xi\right), \quad \text{also}: \ \psi(\xi) := \frac{\varphi_1(\xi)}{\varphi_2(\xi)}$$

und multiplizieren Ly mit $-p(x)/\varphi_2(x)$,

$$-\frac{p(x)}{\varphi_2(x)}\,Ly = -p(x)y'' - p(x)\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,y' - p(x)\frac{\varphi_0(x)}{\varphi_2(x)}\,y.$$

Vergleich mit der angestrebten selbstadjungierten Gestalt

$$\frac{d}{dx}\left(-p(x)\cdot\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = -p(x)y'' - p'(x)y' + q(x)y$$

zeigt, daß diese Transformation das Gewünschte liefert, falls gilt

$$p'(x) = p(x)\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\exp\int_0^x \frac{\varphi_1(\xi)}{\varphi_2(\xi)}\,d\xi\right) = p(x)\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{\varphi_1(\xi)}{\varphi_2(\xi)}\,d\xi\right) = \\ &= p(x)\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}. \end{aligned}$$

Daher liefert die Transformation die selbstadjungierte Gestalt, mit obigem $p(x)$ und $q(x) := -p(x)\dfrac{\varphi_0(x)}{\varphi_2(x)}$.

Lösung 4.5.6 Das Eigenwertproblem $Ly = \lambda y$ mit $Ly = -y''$, $y(0) = y(1) = 0$, hat die Lösungen $\tilde{y}_n(x) = \sin(n\pi x)$, $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Aus Ly selbstadjungiert folgt, daß $\tilde{y}_n$ ein vollständiges Orthogonalsystem in $L^2([0,1])$ bilden. Nach Normierung der $\tilde{y}_n$ ($\tilde{y}_n \mapsto y_n$) läßt sich $f(x)$ in eine Fourierreihe nach den y_n entwickeln,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,y_n, \quad c_n = (f, y_n).$$

Das Randwertproblem $-y'' = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0$ hat somit die Lösung

$$y(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n}\, y_n(x).$$

Die Parseval'sche Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \ \ \|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n^2} \Rightarrow \\
\|y\|^2 &\leq \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 := \frac{1}{\lambda_1^2} \cdot \|f\|^2 = \frac{1}{(\pi^2)^2} \cdot \|f\|^2 \Rightarrow \\
\|y\| &\leq \frac{1}{\pi^2} \cdot \|f\|.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich eine Abschätzung der Lösung, obwohl man sie nicht kennt. Weiters werden *Konditionsabschätzungen* für das Randwertproblem möglich, d.h., Aussagen über die Änderung der Lösung bei Änderung der Daten:

Sei $-\overline{y}'' = \overline{f}, \quad -\hat{y}'' = \hat{f}, \quad \overline{y}(0) = \overline{y}(1) = \hat{y}(0) = \hat{y}(1) = 0 \Rightarrow$

$$-\left(\overline{y} - \hat{y}\right)'' = \left(\overline{f} - \hat{f}\right),\ (\overline{y} - \hat{y})(0) = (\overline{y} - \hat{y})(1) = 0 \ \Rightarrow \left\|\overline{y} - \hat{y}\right\| \leq \frac{1}{\pi^2} \left\|\overline{f} - \hat{f}\right\|.$$

Kapitel 5

Funktionentheorie

5.1 Allgemeines über komplexe Zahlen

Lösung 5.1.1 Wir benutzen die folgenden Beziehungen:

$$0 < r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad -\pi < \varphi \leq \pi,$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctan(y/x), & x \geq 0 \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0,\ y \geq 0, \\ \arctan(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

(1)	$r = 1, \quad \varphi = \pi,$	(2)	$r = 3, \quad \varphi = 0,$
(3)	$r = 4, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} = -0.5\pi,$	(4)	$r = 2\sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4} = 0.75\pi,$
(5)	$r = \sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} = 0.5\pi,$	(6)	$r = 6, \quad \varphi = -\frac{5\pi}{6} \cong -0.8333\pi,$
(7)	$r = \sqrt{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4} = -0.25\pi,$	(8)	$r = \sqrt{5}, \quad \varphi \cong -0.1476\pi,$
(9)	$r = 2, \quad \varphi = -\frac{3\pi}{4} = -0.75\pi,$	(10)	$r = \sqrt{13}, \quad \varphi \cong -0.3128\pi.$

Lösung 5.1.2 (a) Es gilt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2\Big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \\ &+ i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\Big) = \\ &= r_1 \cdot r_2\Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big), \end{aligned}$$

woraus für $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi))$ und für $n \in \mathbb{N}$ (vollständige Induktion)

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

folgt. Weiter ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\,i = \frac{r\cos\varphi}{r^2} - \frac{r\sin\varphi}{r^2}\,i = \\ &= \frac{1}{r}\Big(\cos\varphi - i\sin\varphi\Big) = \frac{1}{r}\Big(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\Big).\end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir:

1.

$$\begin{aligned}(-2+2i)(1-i) &= 2\sqrt{2}\Big(\cos(3\pi/4) + i\sin i(3\pi/4)\Big)\cdot\sqrt{2}\Big(\cos(-\pi/4) + \\ &\quad + i\sin(-\pi/4)\Big) = 4\Big(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\Big) = 4i,\end{aligned}$$

oder direkt

$$(-2+2i)(1-i) = -2(1-i)^2 = -2(1-2i-1) = 4i.$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{-4i}{-2+2i} &= \frac{4(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))}{2\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\Big(\cos(-\pi/2 - 3\pi/4) + i\sin(-\pi/2 - 3\pi/4)\Big) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\Big(-\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\Big) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-1+i\Big) = -1+i,\end{aligned}$$

oder direkt

$$-4\,i\left(\frac{-2}{8} - i\frac{2}{8}\right) = i - 1.$$

3. $(1-i)^6 = \Big(\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))\Big)^6 =$
$= 8(\cos(-3\pi/2) + i\sin(-3\pi/2)) = 8i,$

oder direkt

$$\Big((1-i)^2\Big)^3 = (1-2i-1)^3 = (-2i)^3 = -8i^3 = 8i.$$

4. $$\begin{aligned}(-2+2i)^{15} &= \left(2\sqrt{2}\left(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)\right)\right)^{15} = \\ &= 2^{15}2^{7}\sqrt{2}\left(\cos(45\pi/4)+i\sin(45\pi/4)\right) = \\ &= 2^{22}\sqrt{2}\left(\cos(5\pi/4)+i\sin(5\pi/4)\right) = \\ &= 2^{22}\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -4.194.304(1+i),\end{aligned}$$

   oder direkt

   $$\begin{aligned}(-2+2i)^{15} &= \left(-2(1-i)\right)^{15} = (-2)^{15}((1-i)^2)^7(1-i) = \\ &= -32.768(-2i)^7(1-i) = 4.194.304\,(-i)(1-i) = \\ &= 4.194.304(-i+i^2) = -4.194.304(1+i).\end{aligned}$$

(b)

1. $z_1 = 1-i,\ z_2 = 2+3i,\ z_3 = z_1+z_2 = 3+2i.$
2. $z_1 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i,\ z_2 = -\sqrt{2}+3\sqrt{2}i,\ z_3 = z_1-z_2 = z_1+(-z_2) = -4\sqrt{2}i.$
3. $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1},\ |z_1| = \sqrt{8},\ \varphi_1 = \frac{3\pi}{4},$
   $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2},\ |z_2| = \sqrt{2},\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{4},$
   $z_3 = |z_3|e^{i\varphi_3},\ |z_3| = |z_1||z_2| = 4,\ \varphi_3 = \varphi_1+\varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$
4. $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1},\ |z_1| = 4,\ \varphi_1 = -\frac{\pi}{2},$
   $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2},\ |z_2| = 2\sqrt{2},\ \varphi_2 = \frac{3\pi}{4},$
   $z_3 = |z_3|e^{i\varphi_3},\ |z_3| = |z_1|/|z_2| = \sqrt{2},\ \varphi_3 = \varphi_1-\varphi_2 = -\frac{5\pi}{4}\,\hat{=}\,\frac{3\pi}{4}.$

Siehe Abb. 5.1.

Lösung 5.1.3 Es sei $z = x+iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

1. $|z-5| = |(x-5)+iy| = 6 \Rightarrow (x-5)^2+y^2 = 36$, Kreis mit dem Mittelpunkt $z_0 = 5$ und dem Radius $r = 6$.

2. $\mathrm{Re}(z+2) = x+2 = -1 \Rightarrow x = -3$, Gerade parallel zur y–Achse durch den Punkt $z_0 = -3$.

3. $|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2 = x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow y = 0$, die x–Achse.

4. $|z+2i| \geq 1 \Leftrightarrow x^2+(y+2)^2 \geq 1$, das Äußere des Einheitskreises mit dem Mittelpunkt $z_0 = -2i$.

Abbildung 5.1: Graphisches Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren

5. $\operatorname{Re}(i\overline{z}) = y = 3$, Gerade parallel zur x–Achse durch den Punkt $z_0 = 3i$.

6. $0 < \operatorname{Im}(z+1) < 2\pi \Leftrightarrow 0 < y \leq 2\pi$, ein Streifen parallel zur x–Achse.

7. $\arg\left(\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = z_1 + t(z_2 - z_1),\ t \in \mathbb{R}$,

   Gerade durch die Punkte z_1, z_2.

8.
$$
\begin{aligned}
&|z+2i| + |z-2i| = \sqrt{x^2+(y+2)^2} + \sqrt{x^2+(y-2)^2} = 6 \Leftrightarrow\\
&x^2+(y+2)^2 + 2\sqrt{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)} + x^2 + (y-2)^2 = 36 \Leftrightarrow\\
&x^2+y^2-14 = -\sqrt{x^4+x^2(2y^2+8)+(y^2-4)^2} \Leftrightarrow\\
&(x^2+y^2-14)(x^2+y^2-14) = x^4+2x^2y^2+8x^2+y^4-8y^2+16 \Leftrightarrow\\
&x^4+x^2y^2-14x^2+x^2y^2+y^4-14y^2-14x^2-14y^2+196 =\\
&= x^4+2x^2y^2+8x^2+y^4-8y^2+16 \Leftrightarrow\\
&180 = x^2(8+28)+y^2(-8+28) \Leftrightarrow\\
&180 = 36x^2+20y^2 \Leftrightarrow \tfrac{x^2}{5}+\tfrac{y^2}{9} = 1,
\end{aligned}
$$
   Ellipse mit den Halbachsen $a = \sqrt{5}$ und $b = 3$.

9. $\operatorname{Im}(z^2) = 2xy = 4 \Leftrightarrow xy = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{x}$, Hyperbel.

Lösung 5.1.4 (a) $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
&z + \tfrac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\
&x + iy + \left(\tfrac{x}{r^2} - \tfrac{y}{r^2}\, i\right) = \left(x + \tfrac{x}{r^2}\right) + i\left(y - \tfrac{y}{r^2}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\\
&\tfrac{r^2y-y}{r^2} = 0 \Leftrightarrow y = \operatorname{Im} z = 0 \ \vee\ r^2 = 1 \ \Leftrightarrow\ r = |z| = 1.
\end{aligned}
$$

□

(b) $z = \cos\alpha + i\,\sin\alpha \ \Rightarrow\ z^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$, und
$\dfrac{1}{z^n} = \cos(-n\alpha) + i\,\sin(-n\alpha) = \cos(n\alpha) - i\,\sin(n\alpha)$. □

(c) $z := x + iy,\ w := u + iv \ \Rightarrow$

$$
\left.\begin{array}{rcrcl}
\operatorname{Im}(z+w) & = & y+v & = & 0\\
\operatorname{Im}(z\cdot w) & = & xv+yu & = & 0
\end{array}\right\} \Leftrightarrow
\left.\begin{array}{rcr}
y & = & -v\\
v(x-u) & = & 0
\end{array}\right\} \Leftrightarrow
$$

(1) $x = u \ \wedge\ y = -v \ \Rightarrow\ z = x + iy,\ w = x - iy \Leftrightarrow z = \overline{w}$,

(2) $v = 0 \wedge\ y = -v = 0 \ \Rightarrow z = x,\ w = u \Leftrightarrow z, w \in \mathbb{R}$. □

(d) ($\Rightarrow$) Angenommen $\operatorname{Re} z = x > 0$, zu zeigen $|z-1| < |z+1|$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
x &> 0 \Leftrightarrow \\
-4x &< 0 \Leftrightarrow \\
-2x &< 2x \Leftrightarrow \\
x^2 - 2x + 1 &< x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow \\
(x-1)^2 &< (x+1)^2 \Leftrightarrow \\
0 \leq (x-1)^2 + y^2 &< (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow \\
\sqrt{(x-1)^2 + y^2} &< \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\
|z-1| &< |z+1|.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Angenommen $|z-1| < |z+1|$, zu zeigen $\operatorname{Re} z = x > 0$.

Beweis: Lesen Sie den obigen Beweis von unten nach oben. □

Lösung 5.1.5 Es sei $z = x + iy = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $w = u + iv$.

(a) $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$,
$|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$. □

(b) $|z-w| = |(-1)\cdot(w-z)| = |(-1)|\cdot|w-z| = |w-z|$. □

(c) $|z|^2 = x^2 + y^2$,

$$\begin{aligned}
|z^2| &= \sqrt{(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2} = \sqrt{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2} = \\
&= \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = \sqrt{(x^2+y^2)^2} = x^2 + y^2,
\end{aligned}$$

$$z\,\overline{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - i^2y^2 - ixy + ixy = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$z\,\overline{z} = |z^2| = |z|^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z^2|},\; z \neq 0.$$ □

(d) Nach (c) gilt

$$\begin{aligned}
|zw|^2 &= zw\,\overline{zw} = zw\,\overline{z}\,\overline{w} = z\,\overline{z}\,w\,\overline{w} = |z|^2\,|w|^2 \Rightarrow \\
|zw| &= |z|\cdot|w|; \quad w := \frac{1}{u},\; u \neq 0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{z}{u}\right| = \frac{|z|}{|u|}.
\end{aligned}$$

□

(e) Um die Ungleichung $\Big||z|-|w|\Big| \leq \Big|z-w\Big|$ zu beweisen, führen wir sie durch Äquivalenzumformungen auf eine wahre Aussage zurück,

$$\begin{aligned}
\Big||z|-|w|\Big| &\leq \Big|z-w\Big| \Leftrightarrow \\
\Big|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{u^2+v^2}\Big| &\leq \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2} \Leftrightarrow \\
\left(\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{u^2+v^2}\right)^2 &\leq (x-u)^2+(y-v)^2 \Leftrightarrow \\
x^2+y^2-2\sqrt{(x^2+y^2)\,(u^2+v^2)}+u^2+v^2 &\leq x^2-2ux+u^2+ \\
&+\ y^2-2yv+v^2 \Leftrightarrow \\
\sqrt{(x^2+y^2)\,(u^2+v^2)} &\geq ux+yv.
\end{aligned}$$

Ist $ux+yv<0$, so ist dies eine wahre Aussage und Ende des Beweises. Für $ux+yv \geq 0$ rechnen wir weiter

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2)\,(u^2+v^2) &\geq (ux+yv)^2 \Leftrightarrow \\
x^2u^2+x^2v^2+y^2u^2+y^2v^2 &\geq u^2x^2+2uxyv+y^2v^2 \Leftrightarrow \\
x^2v^2-2uxyv+y^2u^2 &\geq 0 \Leftrightarrow \\
(xv-yu)^2 &\geq 0 \qquad \text{wahre Aussage.}
\end{aligned}$$

□

(f) Aus (e) folgt $|z|-|w| \leq \Big||z|-|w|\Big| \leq \Big|z-w\Big|$.

Setze $w := -u \ \Rightarrow\ |z|-|u| \leq |z+u|$. □

Lösung 5.1.6 $z = x+iy,\ z_0 = a+ib \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
z\,\overline{z}-z\,\overline{z}_0-z_0\,\overline{z} &= x^2+y^2-(x+iy)(a-ib)-(a+ib)(x-iy) = \\
&= x^2+y^2-(xa+yb+i\,(-xb+ya))- \\
&-\ (ax+by+i\,(-ay+bx)) = \\
&= x^2+y^2-xa-yb-ax-by-i\,(-xb+ya)-i\,(-ay+bx) = \\
&= r^2-a^2-b^2 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$r^2 = x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2 \Leftrightarrow$$

$$r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2.$$

□

Lösung 5.1.7 Es sei $z_1 = x+iy,\ z_2 = u+iv$. Dann folgt aus $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$, daß $xu+yv=0$ ist.

Beweis:

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2| &= |z_1-z_2| \Leftrightarrow \\
|z_1+z_2|^2 &= |z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow \\
(x+u)^2+(y+v)^2 &= (x-u)^2+(y-v)^2 \Leftrightarrow \\
(x+u+x-u)(x+u-x+u) &+ \\
+(y+v+y-v)(y+v-y+v) &= 0 \Leftrightarrow \\
2x2u+2y2v &= 4(xu+yv) = 0 \Leftrightarrow \\
xu+yv &= 0.
\end{aligned}$$

(1) $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Re}\left[(x+iy)\cdot\left(\frac{u}{u^2+v^2} - i\,\frac{v}{u^2+v^2}\right)\right] = \frac{xu+yv}{u^2+v^2} = 0 \Rightarrow$

$\frac{z_1}{z_2}$ ist rein imaginär. □

(2) $\cos\big(\angle P_1OP_2\big) = \frac{xu+yv}{|z_1|\,|z_2|} = 0 \ \Rightarrow\ \angle P_1OP_2 = 90^o.$ □

Lösung 5.1.8 Es sei $z_1 = x_1+iy_1,\ z_2 = x_2+iy_2,\ z_3 = x_3+iy_3$. Da die Zahlen z_1, z_2 und z_3 auf einer Geraden liegen, gilt

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}. \tag{5.1}$$

Weiters,

$$\left.\begin{aligned}
\alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3 &= 0\\
\alpha+\beta+\gamma &= 0
\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow
\left.\begin{aligned}
\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3 &= 0\\
\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3 &= 0\\
\alpha+\beta+\gamma &= 0
\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Koeffizientenmatrix singulär ist. Wir berechnen die Determinante,

$$\begin{aligned}
& x_1y_2+x_3y_1+x_2y_3-y_2x_3-y_3x_1-y_1x_2 = \\
= {} & (x_1y_2-y_1x_2)+(x_3y_1-y_3x_1)+(x_2y_3-y_2x_3) = \\
= {} & x_1x_2\left(\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_1}{x_1}\right)+x_3x_1\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_3}{x_3}\right)+x_2x_3\left(\frac{y_3}{x_3}-\frac{y_2}{x_2}\right) = 0,
\end{aligned}$$

wegen (5.1).

5.2 Komplexe Funktionen

Lösung 5.2.1 (1) Unstetig in $z_0 = 0$:

Es sei $z = x + i\,y \Rightarrow f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Für die Folge $z = x < 0$ gilt: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = -1$;

Für die Folge $z = x > 0$ gilt: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = 1$.

(2) $f(z)$ ist stetig $\forall\, z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$. Für $z = z_0 = 0$ muß man zeigen:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon, z_0) \text{ mit } \forall\, z,\ 0 < |z| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z)| = \frac{(\mathrm{Re}(z))^2}{|z|} < \varepsilon.$$

Beweis: Es sei $z = x + i\,y \ \Rightarrow$

$$|f(z)| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = |z| \ < \ \delta := \varepsilon. \qquad \square$$

Lösung 5.2.2 (a) (1) Es sei $z = x + i\,y$, dann ist $\overline{z} = x - i\,y$ und wir setzen $y \neq 0$ voraus.

Für $x = 0$ und $y > 0$ gilt $\arg(iy) + \arg(-iy) = +\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. Analog für $y < 0$. Für $x \neq 0$ hat man

(i) $x > 0,\ y > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \arg z &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ \arg \overline{z} &= \arctan\left(-\frac{y}{x}\right) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{cases}$

(ii) $x > 0,\ y < 0$, genau analog.

(iii) $x < 0,\ y > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \arg z &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, \\ \arg \overline{z} &= \arctan\left(-\frac{y}{x}\right) - \pi = \\ &= -\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi\right). \end{cases}$

(iv) $x < 0,\ y < 0$, genau analog.

(2) Es sei $z_1 = r_1\, e^{i\,\varphi_1},\ z_2 = r_2\, e^{i\,\varphi_2},\ z_2 \neq 0\ \Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i\,(\,\varphi_1 - \varphi_2\,)}}_{\text{Euler'sche Formel}} \quad \Rightarrow \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 \,(\mathrm{mod} 2\pi).$$

Beispiel: Es sei

$$z_1 = (r, \varphi_1) = \left(1, \frac{3}{4}\,\pi\right)$$

und

$$z_2 = (r, \varphi_2) = \left(1, -\frac{3}{4}\,\pi\right),$$

dann ist $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{3}{2}\,\pi$. Gemäß der Konvention muß für das Argument von $\dfrac{z_1}{z_2}$ gelten: $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \in (-\pi, \pi]$, d.h., $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{3}{2}\,\pi - 2\pi = -\dfrac{\pi}{2}$.

(b) (1) Es ist zu zeigen:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\,\varepsilon, z_0) \text{ mit } \forall\, z,\ 0 < |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\overline{z} - \overline{z_0}| < \varepsilon.$$

Beweis:

$$|\overline{z} - \overline{z}_0| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0| < \delta := \varepsilon. \qquad \square$$

(2) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}_-$ und z eine Folge mit

$$z = x + i\,y \to z_0 = x_0 + i\,y_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} \to \frac{y_0}{x_0}.$$

Setzen wir noch voraus, daß $x_0 \neq 0$ ist, d.h., z_0 nicht auf der y–Achse liegt. Dann folgt die Stetigkeit von $\arg z$ an der Stelle z_0 aus der Stetigkeit von $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Es sei $z_0 = i\,y_0,\ y_0 > 0\ \Rightarrow\ \arg z_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Es sei $z = x + i\,y$ eine Folge mit $x \to 0,\ y \to y_0$, dann ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \arg z = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Analog für $z_0 = i\,y_0,\ y_0 < 0$ $\square$.

Lösung 5.2.3 Es ist zu zeigen:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon, z_0) \text{ mit } \forall\, z, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z_0}\right| < \varepsilon.$$

Beweis: Es sei z_0, $|z_0| < 1$, fix und $0 < |z - z_0| < \delta$, dann ist

$$\left|\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{|1-z|\,|1-z_0|} < \frac{\delta}{|1-z|\,|1-z_0|}.$$

Abbildung 5.2: Zum Beweis der Stetigkeit von $f(z)$

Für alle $z \in U_\delta(z_0)$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt, vgl. Abb. 5.2,

$$|1 - z||1 - z_0| > C^2(z_0, \delta),$$

wobei $C(z_0, \delta)$ der kleinste Abstand von $U_\delta(z_0)$ zu 1 ist. Damit ist

$$\left|\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z_0}\right| < \frac{\delta}{C^2(z_0,\delta)} := \varepsilon \Leftrightarrow \delta = \varepsilon \cdot C^2(z_0, \delta),$$

woraus die Stetigkeit der Funktion $\frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$ folgt. $\square$

Die Frage nach der gleichmäßigen Stetigkeit von f kann man sofort verneinen, da $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, nicht gleichmäßig stetig ist.

Übungshalber führen wir den Beweis. Die Funktion wäre gleichmäßig stetig, wenn folgendes gelte:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) \text{ mit } \forall\, z_1, z_2,\ |z_1 - z_2| < \delta \ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{1-z_1} - \frac{1}{1-z_2}\right| < \varepsilon.$$

Wähle $z_1^{(n)} := 1 - \dfrac{1}{n}$, $z_2^{(n)} := 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|z_1^{(n)} - z_2^{(n)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1}\right| = 0$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} \left|f\left(z_1^{(n)}\right) - f\left(z_2^{(n)}\right)\right| = \lim_{n\to\infty} |n - n - 1| = 1.$$

Lösung 5.2.4 (1) Schwierigkeiten können nur entlang der Linien $\operatorname{Im} z = 0$ und $\operatorname{Im} z = 5$ auftreten, da die Funktion auf dem Rest von $\mathbb{C}$ als Kombination stetiger Funktionen stetig ist.
Entlang $\operatorname{Im} z = 0$ ist f *nicht* stetig, da für $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(a - \frac{1}{n}\, i\right) = 7 \neq \lim_{n\to\infty} f\left(a + \frac{1}{n}\, i\right) = 3.$$

Entlang $\operatorname{Im} z = 5$ ist f stetig, da für alle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 = x_0 + 5\,i$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_l(z_n) &= \lim_{n\to\infty} \Big(3 - \operatorname{Im} z_n \ \operatorname{Re} z_n\Big) = 3 - 5\,x_0 = \\ &= \lim_{n\to\infty} f_r(z_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(3 - 5\ \operatorname{Re} z_n + 7\,(5 - \operatorname{Im} z_n)\,|z_n|^2\Big).\end{aligned}$$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{C}$.

(2) f ist als Zusammensetzung und Kombination stetiger Funktionen stetig. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C}$.

(3) Für $z \neq 0$ ist f stetig (Zusammensetzung stetiger Funktionen). An $z = 0$ kann man f *nicht* stetig fortsetzen, da

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{aber} \quad \lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$$

gilt. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(4) An $z \neq 0$ ist f stetig. Im Gegensatz zum Reellen ist jedoch f an $z = 0$ *nicht* stetig fortsetzbar, da

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{aber} \quad \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{i}{n}\right) = -1$$

gilt. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Lösung 5.2.5 (1) $f(x,y) = f(r,\varphi) = r := u(r,\varphi) + i\,v(r,\varphi)$.

Die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten,
$$\frac{\partial u}{\partial r} = 1 \neq \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 = -r\frac{\partial v}{\partial r},$$
sind nirgends erfüllt, $f(z)$ ist *nicht* differenzierbar.

(2) $f(x,y) = x$, wie in (a).

(3) $f(x,y) = \arg z = \varphi := u\,(r,\varphi) + i\,v\,(r,\varphi)$, wie in (a).

Bemerkung: Eine komplexe Funktion der Form $f(x,y) = u\,(x,y)$ oder $f(x,y) = i\,v\,(x,y)$ ist nur im trivialen Fall $u\,(x,y) = \text{const.}$, bzw. $v\,(x,y) = \text{const.}$ differenzierbar, vgl. Beispiel 5.2.8.

Lösung 5.2.6 (a) $f(z) = |z|$ ist nirgends differenzierbar:

Es sei $z_0 = x + iy,\ x^2 + y^2 \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n := \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right) + iy = z_0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} z_n := \lim_{n\to\infty} x + i\left(y + \frac{1}{n}\right) = z_0$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n} + iy\right) - f(x+iy)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} + y^2} - \sqrt{x^2+y^2}}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}\left(\sqrt{x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} + y^2} + \sqrt{x^2+y^2}\right)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad x^2+y^2 \neq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x + i\left(y + \frac{1}{n}\right)\right) - f(x+iy)}{i\,\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2} + y^2} - \sqrt{x^2+y^2}}{i\,\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2}}{2\,i\,\frac{1}{n}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{i\,\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad x^2+y^2 \neq 0.$$

D.h., für $z_0 \neq 0$ existiert die Ableitung $f'(z_0)$ nicht. Für $z_0 = 0$ ist bereits $|x|,\ x \in \mathbb{R}$, nicht differenzierbar.

(b) Cauchy–Riemann'sche Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

1. $u(x,y) = 3x^2y, \quad v(x,y) = 3xy^2 \ \Rightarrow$

   $u_y = 3x^2 \neq -3y^2 = -v_x \ \Rightarrow\ f$ ist *nicht* differenzierbar.

2. $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad v(x,y) = 4(x^3y - xy^3) \ \Rightarrow$

   $u_x = 4x^3 - 12xy^2 = v_y, \quad u_y = -12x^2y + 4y^3 = -v_x,$

   weiters sind die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y stetig, d.h., f ist auf $\mathbb{C}$ differenzierbar.

(c) $u(r,\varphi) = r^2\cos 2\varphi, \quad v(r,\varphi) = r^2 \sin 2\varphi \;\Rightarrow$

$$u_r = 2r\cos 2\varphi = \frac{1}{r}\,v_\varphi, \quad u_\varphi = -2r^2\sin 2\varphi = -rv_r,$$

auch hier sind die partiellen Ableitungen u_r, u_φ, v_r, v_φ stetig, d.h., f ist auf $\mathbb{C}$ differenzierbar.

Lösung 5.2.7 1. $u(x,y) = y, \quad v(x,y) = x \;\Rightarrow$

$$u_x = 0 = v_y \quad \text{aber} \quad u_y = 1 \neq -1 = -v_x,$$

die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt, daher f *nicht* analytisch.

2. $f(z)$ ist *nicht* stetig an $z=0$, deshalb auch *nicht* analytisch an $z=0$:
Es sei $z_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, dann ist zwar $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ aber

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} e^{-\left(\frac{1}{-\frac{1}{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^n = \infty.$$

Lösung 5.2.8 (a) Sei f differenzierbar an $z = z_0$, d.h.,

$\exists\ \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) \Rightarrow$
$\lim_{z\to z_0}\,(f(z) - f(z_0)) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot(z-z_0) = f'(z_0)\cdot 0 = 0 \Rightarrow$
$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \;\Rightarrow\; f$ ist stetig an z_0.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) \in \mathbb{R}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.
Es gilt dann

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y),$$

mit $v(x,y) \equiv 0$.
Wenn f differenzierbar ist, gelten die Cauchy–Rieman'schen Differentialgleichungen,

$$u_x = v_y = 0, \quad u_y = -v_x = 0,$$

und damit ist $u(x,y)$ und $f(z) = u(x,y)$ konstant.

Lösung 5.2.9 1. $\dfrac{df}{dz} := \lim\limits_{\triangle z\to 0} \dfrac{f(z+\triangle z) - f(z)}{\triangle z} =$

$$= \lim_{\triangle z\to 0} \frac{\frac{1+z+\triangle z}{1-z-\triangle z} - \frac{1+z}{1-z}}{\triangle z} =$$

$$= \lim_{\triangle z \to 0} \frac{2\,\triangle z}{(1-z-\triangle z)(1-z)\triangle z} =$$
$$= \lim_{\triangle z \to 0} \frac{2}{(1-z)\,(1-z-\triangle z)} = \frac{2}{(1-z)^2}, \quad z \neq 1.$$

Der obige Grenzwert hängt nicht davon ab, wie $\triangle z$ gegen Null strebt;

$$f'(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)' = \frac{2}{(1-z)^2}, \qquad z \neq 1.$$

2. Wir benützen die Differentiationsregeln:

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)' = \frac{(1+z)'\,(1-z) - (1+z)\,(1-z)'}{(1-z)^2} = \frac{1-z+1+z}{(1-z)^2} =$$
$$= \frac{2}{(1-z)^2}, \qquad z \neq 1.$$

Die Funktion $f(z)$ ist analytisch überall in $\mathbb{C}$, außer im Punkt $z = 1$, wo die Ableitung nicht existiert. Deshalb ist $f(z)$ nicht ganz. Der Punkt $z = 1$ heißt *singuläre Stelle* von $f(z)$.

5.3 Elementare Funktionen

Lösung 5.3.1 (1) Die Zahl $4 - 6i$ hat die Polardarstellung

$$4 - 6i = re^{i\varphi},\ r = \sqrt{52} = 2\sqrt{13},\ \varphi = -\arctan\left(\frac{3}{2}\right).$$

Damit gilt $\quad \sqrt[3]{4-6i} = \sqrt[3]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0,1,2 \Leftrightarrow$

$$\sqrt[3]{4-6i} = \sqrt[6]{52}\,\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big), \quad \alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{3}, \qquad k = 0,1,2.$$

(2) $z := r\,e^{i\varphi} \;\Rightarrow\; \log z = \ln r + i\,(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z};$

Für $z = \dfrac{i}{2}$ gilt $z = \dfrac{1}{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow$

<u>Hauptzweig:</u>

$$\ln\frac{i}{2} = -\ln 2 + i\,\frac{\pi}{2},$$

<u>k-ter Nebenzweig:</u>

$$\ln_k \frac{i}{2} = -\ln 2 + i\,\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

(3) $\sqrt[3]{-1} = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0,1,2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[3]{-1} = \left\{e^{i\,\frac{\pi}{3}},\, e^{i\pi},\, e^{i\,\frac{5\pi}{3}}\right\}$

<u>Hauptzweig:</u>

$\ln\sqrt[3]{-1} = \left\{i\,\frac{\pi}{3},\, i\pi,\, i\,\frac{5\pi}{3}\right\}.$

(4) Es sei $z, c \in \mathbb{C}$, dann ist $z^c := e^{c\log z}$, wobei der Hauptzweig der Potenzfunktion $z^c := e^{c\ln z}$ ist.

<u>Hauptzweig der Potenzfunktion:</u>

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i\left(i\,\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

(5) <u>Hauptzweig:</u>

$$(1+i)^i = e^{i\ln(1+i)} = e^{i\left(\ln\sqrt{2}+i\,\frac{\pi}{4}\right)} = e^{-\frac{\pi}{4}+\frac{i}{2}\,\ln 2}.$$

(6) <u>Hauptzweig:</u>

$$\arcsin z = -i\;\ln\!\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right);$$

Mit $z = \frac{3}{4}\,i$ folgt

$$\arcsin\left(\frac{3i}{4}\right) = -i\;\ln\left(-\frac{3}{4}+\sqrt{1+\frac{9}{16}}\right) = -i\;\ln\left(\frac{1}{2}\right) = i\;\ln 2.$$

Lösung 5.3.2 (a) $\dfrac{e^z+e^{-z}}{2} = \cosh z = 0 \Leftrightarrow e^z = -e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow$

$2z = i\pi + 2k\pi i,\; k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow z = i\,\dfrac{2k+1}{2}\,\pi,\; k\in\mathbb{Z},$

$\dfrac{e^z-e^{-z}}{2} = \sinh z = 0 \Leftrightarrow e^z = e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow$

$2z = 2k\pi i,\; k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow z = k\pi i,\; k\in\mathbb{Z}.$

(b) $\cosh iz = \dfrac{1}{2}\,\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) = \cos z,$

$\sinh iz = \dfrac{1}{2}\,\left(e^{iz}-e^{-iz}\right) = i\,\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = i\,\sin z.$

(c) $\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} = e^{-iz} \quad\Leftrightarrow\; \operatorname{Im} z = 0,\; \operatorname{Re} z = k\pi,\; k\in\mathbb{Z},$

$\cos z = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} = -e^{-iz} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Im} z = 0,\; \operatorname{Re} z = \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\; k\in\mathbb{Z}.$

Lösung 5.3.3 (1) Sei $x \in \mathbb{C}$ beliebig. Zu zeigen: $\exists\, z \in \mathbb{C}:\ \cos z = x$.

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = x \Leftrightarrow e^{2iz} - 2xe^{iz} + 1 = 0;$$

$$e^{iz} = x \pm \sqrt{x^2-1} \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \ \Rightarrow\ e^{iz} = x + \sqrt{x^2-1}.$$

Diese Wahl entspricht dem Hauptzweig der Wurzelfunktion. Für $x = 0$ ergibt sich z. B. $z = \frac{\pi}{2}$ (bzw. $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$):

$$e^{iz} = e^{i\,\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\Big|_{x=0} = \sqrt{-1} = i.$$

Da $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ surjektiv ist, $\exists\, z_0 :\ e^{iz_0} = x + \sqrt{x^2-1}$. Jedenfalls ist dann $\cos z_0 = x$.

(2) Analog zu (1).

Die Abbildungen sind *nicht* bijektiv, da z.B.

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \sin\pi = \sin 0 = 0.$$

Lösung 5.3.4 (a) $z^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\ln z} = e^{\alpha\ln z}\cdot e^{\beta\ln z} = z^\alpha \cdot z^\beta$.

(b) $(z^\alpha)' = \left(e^{\alpha\ln z}\right)' = \alpha\, e^{\alpha\ln z}\cdot\frac{1}{z} = \alpha\, z^\alpha\cdot\frac{1}{z} = \alpha\cdot z^{\alpha-1}$.

(c) Gilt nicht im Komplexen, da

$$\Big((-1)\cdot(-1)\Big)^{\frac{1}{2}} = 1 \neq -1 = \underbrace{(-1)^{\frac{1}{2}}}_{=e^{i\,\frac{\pi}{2}}}\cdot\underbrace{(-1)^{\frac{1}{2}}}_{=e^{i\,\frac{\pi}{2}}}.$$

Lösung 5.3.5 (a) $e^{2\pm3\pi i} = e^2\Big(\underbrace{\cos(\pm3\pi)}_{=-1} + i\,\underbrace{\sin(\pm3\pi)}_{=0}\Big) = -e^2$.

(b) $e^{\frac{\pi}{2}\,i} = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + i\,\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = i$.

(c) $e^{\frac{2+\pi i}{4}} = e^{\frac{1}{2}}\Big(\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\,\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big) = \sqrt{e}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(d) $\operatorname{arctan}_a z := \dfrac{1}{2i}\log\left(\dfrac{i-z}{i+z}\right),\quad z := 2i \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\operatorname{arctan}_a(2i) &= \frac{1}{2i}\log\left(\frac{-i}{3i}\right) = \frac{1}{2i}\log\left(-\frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{2i}\left(\ln\left|-\frac{1}{3}\right| + i\,(\pi + 2k\pi)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\,\pi\,(1+2k) + i\,\frac{\ln 3}{2} = \frac{1}{2}\,\pi\,(1+2k) + i\,\ln\sqrt{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(e) $\cosh_a^{-1} z := \log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),\quad z := -1 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\cosh_a^{-1}(-1) &= \log(-1) = \ln|-1| + i\,(\pi + 2k\pi) = \\ &= i\,\pi\,(1+2k), \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(f) $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = r\,e^{i\varphi}$ mit $r = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow$

$$\sqrt{i} = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} & = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) & = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z_1 &:= \frac{1+i}{\sqrt{2}} = r_1\,e^{i\varphi_1}, \quad r_1 = 1,\ \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \\ z_2 &:= -\frac{1+i}{\sqrt{2}} = r_2\,e^{i\varphi_2}, \quad r_2 = 1,\ \varphi_2 = -\frac{3}{4}\,\pi, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln z_1 = \ln|z_1| + i\arg z_1 = \ln 1 + i\,\frac{\pi}{4} = i\,\frac{\pi}{4}, \\ \ln z_2 = \ln|z_2| + i\arg z_2 = \ln 1 - i\,\frac{3}{4}\,\pi = -i\,\frac{3}{4}\,\pi. \end{cases}$$

Vorsicht mit der Anwendung von Rechenregeln, die im Reellen selbstverständlich sind:
Würde man hier (formal) schreiben

$$\ln\sqrt{i} = \ln i^{\frac{1}{2}} \overset{!}{=} \frac{1}{2}\ln i = \frac{1}{2}\left(i\,\frac{1}{2}\right) = i\,\frac{1}{4},$$

so ginge sofort ein Zweig der Wurzelfunktion verloren.

Lösung 5.3.6 Es gilt $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$

(a)

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= \frac{e^{2iz} - 2e^0 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2e^0 + e^{-2iz}}{4} = \\ &= \frac{1}{4}\left(-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right) = \\ &= \frac{4}{4} = 1, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

$\square$

(b) $\sin z_1 \cos z_2 \; + \; \cos z_1 \sin z_2 =$

$$= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} =$$

$$= \frac{1}{4i}\Big(e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{iz_1}e^{-iz_2} - e^{-iz_1}e^{iz_2} - e^{-iz_1}e^{-iz_2} +$$

$$+ e^{iz_1}e^{iz_2} - e^{iz_1}e^{-iz_2} + e^{-iz_1}e^{iz_2} - e^{-iz_1}e^{-iz_2}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{iz_1}e^{iz_2} - e^{-iz_1}e^{-iz_2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\,(z_1+z_2)} - e^{-i\,(z_1+z_2)}\right) =$$

$$= \sin(z_1 + z_2), \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$ $\square$

(c) $\sin(-z) = \dfrac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$ $\square$

(d) $\sin(iz) = \dfrac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \dfrac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = -i\,\dfrac{e^{-z} - e^{z}}{2} =$

$$= i\,\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i\,\sinh z, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$ $\square$

Lösung 5.3.7 (a) $z = \cot w = \dfrac{\cos w}{\sin w} = i\dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{e^{iw} - e^{-iw}} = i\dfrac{e^{2iw} + 1}{e^{2iw} - 1} \Rightarrow$

$e^{2iw}(z - i) - (z + i) = 0 \;\Rightarrow\; e^{2iw} = \dfrac{z + i}{z - i} \Rightarrow$

$w = \dfrac{1}{2i}\,\ln\left(\dfrac{z + i}{z - i}\right) =: \operatorname{arccot} z.$

(b) Die folgenden Rechnungen gelten für den Hauptzweig der Logarithmusfunktion. Das Ergebnis hängt von der Reihenfolge der Operationen ab!

1. $\left(i^{-i}\right)^i = i^{(-i^2)} = i^1 = i,$
2. $\left(-i\right)^i = \exp(i\ln(-i)) = \exp\Big(i\ \ln|i| + i\ \arg(-i)\Big) =$

$$= \exp\left(i\left(i\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\right)\right) = \exp\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{e^{\pi}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} i^{\left(-i^i\right)} &= i^{\sqrt{e^\pi}} = \exp\left(\sqrt{e^\pi}\ln i\right) = \exp\left(\sqrt{e^\pi} i\,\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{e^\pi}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{e^\pi}\right). \end{aligned}$$

Lösung 5.3.8 (1) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{2\sin z\cos z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{2\cos z} = \dfrac{1}{2}.$

(2) Es gilt

$$\left(z^3+1\right)\Bigg|_{z=e^{i\pi/3}} = e^{i\pi} + 1 = \cos\pi + i\sin\pi + 1 = -1+1 = 0$$

und deshalb ergibt sich die Form „ $\frac{0}{0}$ “ .

$$\begin{aligned} \lim_{z\to e^{i\pi/3}} \left(z - e^{i\pi/3}\right)\left(\frac{z}{z^3+1}\right) = &= \lim_{z\to e^{i\pi/3}} \frac{2z - e^{i\pi/3}}{3z^2} = \frac{2e^{i\pi/3} - e^{i\pi/3}}{3e^{2i\pi/3}} \\ &= \frac{e^{i\pi/3}}{3e^{2i\pi/3}} = \frac{1}{3e^{i\pi/3}} = \frac{2}{3\left(1+i\sqrt{3}\right)}. \end{aligned}$$

(3) Für den Hauptzweig der Logarithmusfunktion gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \ln\left((\cos z)^{\frac{1}{z^2}}\right) &= \lim_{z\to 0} \frac{\ln(\cos z)}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z}{2z\ \cos z} = \\ &= \lim_{z\to 0} \left(\frac{\sin z}{z}\right)\left(-\frac{1}{2\cos z}\right) = \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \lim_{z\to 0} \left(-\frac{1}{2\cos z}\right) = 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\lim_{z\to 0} (\cos z)^{\frac{1}{z^2}} = \lim_{z\to 0} \exp\left(\ln(\cos z)^{\frac{1}{z^2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}},$$

wegen Stetigkeit der Exponentialfunktion.

Lösung 5.3.9 Es ist $z = x + iy$.

(a) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \\ &= \sin^2 x(1 + \sinh^2 y) + (1 - \sin^2 x)\ \sinh^2 y = \\ &= \sin^2 x + \sinh^2 y \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$|\sin z| = 1 \Leftrightarrow |\sin z|^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sinh^2 y = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sinh^2 y &= 1 - \sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \\ \sinh y &= \pm \cos x \Rightarrow \\ y &= \ln\left(\pm \cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}\right). \end{aligned}$$

(b) $y = \ln\left(\pm \sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}\right)$. Jeder Ast ist 2π–periodisch, vgl. Abb. 5.3

Abbildung 5.3: Die Zahlen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $|\sin z| = 1$

Lösung 5.3.10 Maja hat recht! (Eh klar...)
Die Funktion $f(z) = e^{e^z}$ ist eine nicht–konstante ganze Funktion und es gilt natürlich $e^{e^z} \neq 0, \ \ \forall\, z \in \mathbb{C}$. Damit stimmt die erste Behauptung von Willi, daß $f(z)$ den Wert 0 nicht annimmt.
Die zweite Behauptung, daß der Wert 1 nicht angenommen wird, stimmt *nicht*. Im Gegensatz zum Reellen gibt es im Komplexen unendlich viele Werte mit

$$f(z_k) = 1, \quad z_k = \left(\ln(2\pi) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lösung 5.3.11 $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$;

$$\left.\begin{array}{rcccr} w(-i) & = & \dfrac{-ai+b}{-ci+d} & = & -1 \\ w(0) & = & \dfrac{b}{d} & = & i \\ w(i) & = & \dfrac{ai+b}{ci+d} & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} a & = & -di \\ b & = & di \\ c & = & d \end{array}\right\} \Rightarrow w(z) = \frac{-iz+i}{z+1}.$$

Es seien $z = iy, \ y \in \mathbb{R}$, die Punkte der y–Achse.
Was sind die Bilder dieser Punkte unter der Abbildung w?

$$\begin{aligned} w(iy) &= \frac{-i(iy)+i}{iy+1} = i\frac{1-iy}{1+iy} = i\frac{1-2iy-y^2}{1+y^2} = \\ &= \frac{2y}{1+y^2} + i\frac{1-y^2}{1+y^2} = u + iv \Rightarrow \end{aligned}$$

$$u^2+v^2 = \frac{4y^2+1-2y^2+y^4}{(1+y^2)^2} = \frac{y^4+2y^2+1}{(1+y^2)^2} = 1,$$

d.h., die y–Achse geht in den Einheitskreis über.

Lösung 5.3.12 In beiden Fällen handelt es sich um eine Abbildung der Form

$$w(z) = az + b, \qquad a,\, b \in \mathbb{C},$$

d.h., die Bilder von Geraden sind wieder Gerade. Um die Skizze zu machen, genügt es, die Bilder der Eckpunkte des gegebenen Rechtecks zu bestimmen. Wir geben aber auch die Gleichungen der Bilder der Ränder an.

(a) $w = u + iv = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z = (1+i)(x+iy) = x - y + i(x+y) \Leftrightarrow$

$$u(x,y) = x - y, \quad v(x,y) = x + y.$$

Damit ist

$$w(0,0) = (0,0),\ w(2,0) = (2,2),\ w(2,1) = (1,3),\ w(0,1) = (-1,1)$$

und

$$\begin{array}{lcll}
x = 0 & \xrightarrow{w} & \left.\begin{array}{l} u = -y \\ v = y \end{array}\right\} & u + v = 0, \\[2ex]
y = 0 & \xrightarrow{w} & \left.\begin{array}{l} u = x \\ v = x \end{array}\right\} & u - v = 0, \\[2ex]
x = 2 & \xrightarrow{w} & \left.\begin{array}{l} u = 2 - y \\ v = 2 + y \end{array}\right\} & u + v = 4, \\[2ex]
y = 1 & \xrightarrow{w} & \left.\begin{array}{l} u = x - 1 \\ v = x + 1 \end{array}\right\} & u - v = -2,
\end{array}$$

siehe Abb. 5.4.

Abbildung 5.4: Die Funktion $w(z) = (1+i)z$

(b) $w = u + iv = (1+i)(x+iy) + (1-2i) = x - y + 1 + i(x + y - 2) \Leftrightarrow$

$$u(x,y) = x - y + 1, \quad v(x,y) = x + y - 2.$$

Damit ist

$$w(0,0) = (1,-2),\ w(2,0) = (3,0),\ w(2,1) = (2,1),\ w(0,1) = (0,-1)$$

und

$$\begin{array}{lcll} x = 0 & \xrightarrow{w} & \left.\begin{array}{l} u = -y + 1 \\ v = y - 2 \end{array}\right\} & u + v = -1, \\ y = 0 & \xrightarrow{w} & \left.\begin{array}{l} u = x + 1 \\ v = x - 2 \end{array}\right\} & u - v = 3, \\ x = 2 & \xrightarrow{w} & \left.\begin{array}{l} u = 3 - y \\ v = y \end{array}\right\} & u + v = 3, \\ y = 1 & \xrightarrow{w} & \left.\begin{array}{l} u = x \\ v = x - 1 \end{array}\right\} & u - v = 1, \end{array}$$

siehe Abb. 5.5

5.4 Komplexe Integration

Lösung 5.4.1 $C := C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ mit

$$\begin{aligned} C_1 &:= \{z = 1 + ti, \quad t \in [-1,1]\}, \\ C_2 &:= \{z = -t + i, \quad t \in [-1,1]\}, \\ C_3 &:= \{z = -1 - ti, \quad t \in [-1,1]\}, \\ C_4 &:= \{z = t - i, \quad t \in [-1,1]\}. \end{aligned}$$

Ist $z(t),\ t \in [a,b]$ die Parameterdarstellung der Kurve C, so ist

$$\int\limits_C f(z)\,dz := \int\limits_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

Damit ist (C positiv orientiert) zu zeigen

$$\oint\limits_C \sin 2z\,dz = 0.$$

Abbildung 5.5: Die Funktion $w(z) = (1 + i)z + (1 - 2i)$

$$\begin{aligned}
\oint\limits_C \sin 2z\,dz &= \int\limits_{-1}^{1} \sin\Big(2(1+ti)\Big)\cdot i\,dt + \int\limits_{-1}^{1} \sin\Big(2(-t+i)\Big)\cdot(-1)\,dt + \\
&+ \int\limits_{-1}^{1} \sin\Big(2(-1-ti)\Big)\cdot(-i)\,dt + \int\limits_{-1}^{1} \sin\Big(2(t-i)\Big)\,dt = \\
&= -\frac{\cos\Big(2(1+ti)\Big)\cdot i}{2i}\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{\cos\Big(2(-t+i)\Big)\cdot(-1)}{-2}\Bigg|_{-1}^{1} - \\
&- \frac{\cos\Big(2(-1-ti)\Big)\cdot(-i)}{-2i}\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{\cos\Big(2(t-i)\Big)}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = \\
&- \cos\Big(2(1+ti)\Big)\Bigg|_{-1}^{1} - \cos\Big(2(-t+i)\Big)\Bigg|_{-1}^{1} = \\
&= -\cos\Big(2(1+i)\Big) + \cos\Big(2(1-i)\Big) - \\
&- \cos\Big(2(-1+i)\Big) + \cos\Big(2(1+i)\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Lösung 5.4.2 1. $C = \{z = iy,\ y \in [-1,1]\}, \quad dz = i\,dy \quad \Rightarrow$

$$\int\limits_{-i}^{i} |z|\,dz = \int\limits_{-i}^{i} |y|\,i\,dy = 2i\int\limits_{0}^{1} y\,dy = 2i\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{0}^{1} = i.$$

2. $C = \Big\{z(t) = \cos t + i\sin t,\ t \in \Big[-\frac{\pi}{2},\pi\Big) \cup \Big[\pi,\frac{\pi}{2}\Big]\Big\} =$

$= \Big\{z(t) = \cos t + i\sin t,\ t \in \Big[-\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2}\,\pi\Big]\Big\},$

$dz = (-\sin t + i\cos t)\,dt \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-i}^{i} |z|\,dz &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3}{2}\pi} 1\cdot(-\sin t + i\cos t)\,dt = \\
&= \underbrace{\cos t\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3}{2}\pi}}_{=0} + i\sin t\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3}{2}\pi} = i(1+1) = 2i.
\end{aligned}$$

3. $C = \left\{ z(t) = \cos t + i \sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad \Rightarrow$

$$\int\limits_{-i}^{i} |z|\, dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t + i \cos t)\, dt = \underbrace{\cos t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + i \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2i.$$

Die Funktion $f(z) = |z|$ ist nicht analytisch, vgl. Beispiel 5.2.5(a), deshalb ist der Wert des Integrals wegabhängig.

Lösung 5.4.3 $C := C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, wobei

$$C_1 := \{z = t,\ t \in [0,1]\}, \quad dz = dt \quad \Rightarrow$$

$$\int\limits_{C_1} \pi e^{\pi \overline{z}}\, dz = \int\limits_{0}^{1} \pi e^{\pi t}\, dt = \pi\, e^{\pi t} \frac{1}{\pi} \Big|_0^1 = e^{\pi} - 1,$$

$$C_2 := \{z = 1 + it,\ t \in [0,1]\}, \quad dz = idt \quad \Rightarrow$$

$$\int\limits_{C_2} \pi e^{\pi \overline{z}}\, dz = i \int\limits_{0}^{1} \pi e^{\pi(1-it)}\, dt = i\pi e^{\pi(1-it)} \frac{1}{-i\pi} \Big|_0^1 = e^{\pi} - e^{\pi(1-i)} = 2e^{\pi},$$

$$C_3 := \{z = t + i,\ t \in [1,0]\}, \quad dz = dt \quad \Rightarrow$$

$$\int\limits_{C_3} \pi e^{\pi \overline{z}}\, dz = \int\limits_{1}^{0} \pi e^{\pi(t-i)}\, dt = \pi e^{\pi(t-i)} \frac{1}{\pi} \Big|_1^0 = e^{-i\pi} - e^{\pi(1-i)} = e^{\pi} - 1,$$

$$C_4 := \{z = it,\ t \in [1,0]\}, \quad dz = idt \quad \Rightarrow$$

$$\int\limits_{C_4} \pi e^{\pi \overline{z}}\, dz = i \int\limits_{1}^{0} \pi e^{-it\pi}\, dt = i\pi e^{-it\pi} \frac{1}{-\pi i} \Big|_1^0 = e^{-i\pi} - 1 = -2,$$

$$\Rightarrow \qquad \oint\limits_{C} \pi e^{\pi \overline{z}}\, dz = e^{\pi} - 1 + 2e^{\pi} + e^{\pi} - 1 - 2 = 4\left(e^{\pi} - 1\right).$$

Lösung 5.4.4 Die komplexe Integration *analytischer* Funktionen ist besonders einfach, wenn man die Stammfunktion kennt, vgl. Skriptum. Gilt $F'(z) = f(z)$, so ist

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1).$$

D.h., die Integration im Komplexen verläuft wie im Reellen.

(a) Es seien $F(z)$ und $G(z)$ in einem einfach zusammenhängendem Gebiet $B \subset \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt

$$\frac{d}{dz}\Big(F(z)G(z)\Big) = F'(z)G(z) + F(z)G'(z).$$

Es sei C ein stückweise glatter Weg in B, der die Punkte z_1, z_2 verbindet. Dann liefert die beiderseitige Integration der letzten Gleichung

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} d\Big(F(z)G(z)\Big) = \int\limits_{z_1}^{z_2} \Big(F(z)G(z)\Big)'\, dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} F'(z)G(z)\, dz + \int\limits_{z_1}^{z_2} F(z)G'(z)\, dz.$$

Die Funktion $F(z)G(z)$ ist eine Stammfunktion und das erste Integral ist wegunabhängig, woraus

$$F(z)G(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = \int\limits_{z_1}^{z_2} F'(z)G(z)\, dz + \int\limits_{z_1}^{z_2} F(z)G'(z)\, dz$$

oder

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} F(z)G'(z)\, dz = F(z)G(z)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int\limits_{z_1}^{z_2} F'(z)G(z)\, dz$$

folgt. □

(b) 1. $F(z) := z,\ G'(z) := e^{2z} \ \Rightarrow\ F'(z) = 1,\ G(z) = \dfrac{1}{2}\, e^{2z}$;

$F(z)$ und $G(z)$ sind analytisch in $\mathbb{C}$ $\quad\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int ze^{2z}\, dz &= \int F(z)G'(z)\, dz = F(z)G(z) - \int F'(z)G(z)\, dz + c = \\ &= \frac{1}{2}\, ze^{2z} - \int \frac{1}{2}\, e^{2z}\, dz + c = \frac{1}{2}\, ze^{2z} - \frac{1}{4} e^{2z} + c = \\ &= \frac{1}{2}\, e^{2z}\left(z - \frac{1}{2}\right) + c, \quad c = const.; \end{aligned}$$

$$\int\limits_0^1 ze^{2z}\, dz = \frac{1}{2}\, e^{2z}\left(z - \frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\Big(e^2 + 1\Big).$$

2. $F(z) := z^2,\ G'(z) := \sin 4z \ \Rightarrow\ F'(z) = 2z,\ G(z) = -\dfrac{1}{4}\cos 4z$;

$F(z)$ und $G(z)$ sind analytisch in $\mathbb{C} \quad \Rightarrow$

$$\int z^2 \sin 4z \, dz = \int F(z) G'(z) \, dz = F(z)G(z) - \int F'(z)G(z) \, dz + c =$$

$$= -\frac{1}{4} z^2 \cos 4z + \frac{1}{2} \int z \cos 4z \, dz + c;$$

$F(z) := z, G'(z) = \cos 4z \;\Rightarrow\; F'(z) = 1,\; G(z) = \dfrac{1}{4} \sin 4z;$

$F(z)$ und $G(z)$ sind analytisch in $\mathbb{C} \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int z \cos 4z \, dz &= \frac{1}{4} z \sin 4z - \int \frac{1}{4} \sin 4z \, dz + c \quad \Rightarrow \\
\int z^2 \sin 4z \, dz &= -\frac{1}{4} z^2 \cos 4z + \frac{1}{8} z \sin 4z + \frac{1}{8} \frac{1}{4} \cos 4z + c = \\
&= \frac{1}{32} \Big(-8z^2 \cos 4z + 4z \sin 4z + \cos 4z \Big) + c;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} z^2 \sin 4z \, dz &= \frac{1}{32} \Big[-8z^2 \cos 4z + 4z \sin 4z + \cos 4z \Big] \Big|_0^{2\pi} = \\
&= \frac{1}{32} \Big(-8 \, (2\pi)^2 + 1 - 1 \Big) = -\pi^2.
\end{aligned}$$

3. $F(z) := z + 2,\; G'(z) = e^{iz} \;\Rightarrow\; F'(z) = 1,\; G(z) = \dfrac{1}{i} \, e^{iz};$

$F(z)$ und $G(z)$ sind analytisch in $\mathbb{C}$. Setze $z_1 := 0,\; z_2 := \pi + i \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_{z_1}^{z_2} (z+2) \, e^{iz} \, dz &= \frac{1}{i} \, (z+2) \, e^{iz} \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{i} \, e^{iz} \, dz = \\
&= \frac{1}{i} \, (\pi + i + 2) \, e^{i(\pi+i)} - \frac{1}{i} \, 2 - \frac{1}{i^2} \, e^{iz} \Big|_{z_1}^{z_2} = \\
&= -i(2 + \pi + i) \, e^{-1+i\pi} + 2i + e^{-1+i\pi} - 1 = \\
&= -i(2 + \pi + 2i) \, e^{-1} \, (\cos \pi + i \sin \pi) + 2i - 1 = \\
&= i(2 + \pi + 2i) \, e^{-1} + 2i - 1 = \\
&= e^{-1} \Big(i(2+\pi) - 2 \Big) - 1 + 2i =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^{-1}\Big(-2+i(2+\pi)\Big)-1+2i= \\ &= -2\,e^{-1}-1+i\left(e^{-1}\,(2+\pi)+2\right). \end{aligned}$$

Lösung 5.4.5 (a) Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(z-1)\,(z-2)} := \frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}$$

ergibt $A=-1,\ B=1$. Mit $f(z)=\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)$ gilt für das Integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)\,(z-2)}\,dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-2}dz - \oint_C \frac{f(z)}{z-1}dz.$$

Die Funktion $f(z)$ ist analytisch in $\mathbb{C}$ und $z_0=1$ bzw. $z_0=2$ liegt innerhalb von C. Wir wenden die Cauchy'sche Integralformel an

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)\,(z-2)}\,dz &= 2\pi i\,f(2)-2\pi i\,f(1)= \\ &= 2\pi i\,((\sin 4\pi+\cos 4\pi)-(\sin\pi+\cos\pi))= \\ &= 4\pi i. \end{aligned}$$

(b) Wir führen zuerst die Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{1}{z^2+1} := \frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+i} \;\Rightarrow\; 1 = A(z+i)+B(z-i), \quad \forall\, z\in\mathbb{C}.$$

Mit $z=i$ folgt $A=\frac{1}{2i}$. Mit $z=-i$ folgt $B=\frac{1}{-2i}$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z-i}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z+i}\,dz\right).$$

Wir wenden die Cauchy'sche Integralformel an und erhalten

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right) = \sin t.$$

□

Lösung 5.4.6 Wir verwenden die Cauchy'sche Integralformel. Die Integrationswege sind stückweise glatt und werden im positiven Sinn durchlaufen. Die Funktion $f(z) = \cos \pi z$ ist analytisch in $\mathbb{C}$. Es gilt

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1},$$

und damit ist

$$I := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2-1}\, dz = \frac{1}{4\pi i} \left(\oint_C \frac{\cos \pi z}{z-1}\, dz - \oint_C \frac{\cos \pi z}{z+1}\, dz \right).$$

1. $z_0 = 1$ und $z_0 = -1$ liegen innerhalb des Integrationsweges und deshalb ist

$$I = \frac{1}{4\pi i} \left(\cos \pi z \Big|_{z=1} - \cos \pi z \Big|_{z=-1} \right) = 0.$$

2. Nur $z_0 = 1$ liegt innerhalb des Integrationsweges und deshalb gilt nach dem Cauchy'schen Integralsatz $\Big(f(z) = \frac{\cos \pi z}{z+1}$ ist analytisch innerhalb von $C \Big)$

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{z+1}\, dz = 0.$$

Folglich

$$I = \frac{1}{4\pi i} \oint_C \frac{\cos \pi z}{z-1}\, dz = \frac{1}{2} \cos \pi z \Big|_{z=1} = -\frac{1}{2}.$$

Lösung 5.4.7 (a) Cauchy'sche Integralformel:
$f(z) = e^{iz}$ ist analytisch in $\mathbb{C}$, $z_0 = 0$ liegt innerhalb von C, $n = 2$;

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3}\, dz = 2\pi i \, \frac{(e^{iz})''}{2!} \Big|_{z=0} = \pi i i^2 e^{iz} \Big|_{z=0} = -\pi i.$$

(b) Nullstellen des Nenners: $z_0 = 0$, $z_{1,2} = \pm 2i\sqrt{2}$. Davon liegt aber nur $z_0 = 0$ innerhalb von C. Es sei

$$\frac{1}{z(z^2+8)} = \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-2i\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{2+2i\sqrt{2}}, \tag{5.2}$$

dann ist

$$\oint_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz = \alpha \oint_C \frac{\cos z}{z}\,dz + \underbrace{\beta \oint_C \frac{\cos z}{z-2i\sqrt{2}}\,dz + \gamma \oint_C \frac{\cos z}{z+2i\sqrt{2}}\,dz}_{\substack{\text{verschwindet nach dem} \\ \text{Cauchy'schen Integralsatz}}} =$$

$$= \alpha \oint_C \frac{\cos z}{z}\,dz = 2\pi i\alpha\, \cos z \Big|_{z=0} = 2\pi\alpha\, i.$$

Es genügt also, α zu finden. Aus (5.2) hat man

$$1 = \alpha\,(z^2+8) + \beta\, z\,(z+2i\sqrt{2}) + \gamma\, z\,(z-2i\sqrt{2}), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Wir setzen $z = 0$: $\quad 1 = 8\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{8}$

und damit

$$\oint_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz = 2\pi\alpha\, i = 2\pi\frac{1}{8}\, i = \frac{\pi\, i}{4}\,.$$

Lösung 5.4.8 (a) Cauchy'sche Integralformel:
$f(z) = \sin^6 z$ ist analytisch in $\mathbb{C}$, $z_0 = \frac{\pi}{6}$ liegt innerhalb von C;

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_C \frac{\sin^6 z}{z-\frac{\pi}{6}}\,dz = 2\pi i\, f(z)\Big|_{z=\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 2\pi i\, \sin^6\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi i\, \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{\pi i}{32}.$$

(b) Cauchy'sche Integralformel:
$f(z) = \sin^6 z$ ist analytisch in $\mathbb{C}$, $z_0 = \frac{\pi}{6}$ liegt innerhalb von C, $n = 2$;

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = 2\pi i\, \frac{\left.(f(z))^{(n)}\right|_{z=z_0}}{n!} \quad \Leftrightarrow$$

$$\oint_C \frac{\sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}\,dz = 2\pi i\, \frac{\left.\left(\sin^6 z\right)''\right|_{z=\frac{\pi}{6}}}{2!} =$$

$$= \pi i \left(30\sin^4 z\cos^2 z - 6\sin^6 z\right)\Big|_{z=\frac{\pi}{6}} = \frac{21\pi i}{16}.$$

(c) 1. Cauchy'sche Integralformel:
$f(z) = e^{3z}$ ist analytisch in $\mathbb{C}$, $z_0 = i\pi$ liegt innerhalb von

$$C = \{z \in \mathbb{C};\ |z-1| = 4\};$$

$$\oint_C \frac{e^{3z}}{z - i\pi}\, dz = 2\pi i\, e^{3z}\Big|_{z=i\pi} = 2\pi i\, e^{3\pi i} = -2\pi i.$$

2. $z_0 = i\pi$ liegt außerhalb der Ellypse C, da

$$|z_0 - 2| + |z_0 + 2| = 2\sqrt{4 + \pi^2} \cong 7.45 > 6,$$

d.h.,

$$\oint_C \frac{e^{3z}}{z - i\pi}\, dz \;=\; 0$$

nach dem Cauchy'schen Integralsatz.

5.5 Potenzreihen

Lösung 5.5.1 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n} = \frac{1}{2i} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2i)^k} =$

$$= \frac{1}{2i} \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2i}} = \frac{1}{2i - 1} = \frac{1}{-1 + 2i} = -\frac{1}{5}\Big(1 + 2i\Big).$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{in(n+1)} &= \frac{1}{i}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= \frac{1}{i} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= \frac{1}{i} = -1. \end{aligned}$$

Lösung 5.5.2 Es sei $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe in $\mathbb{C}$. Ihr Konvergenzradius r ist gegeben durch

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}.$$

1. $a_k = \dfrac{1}{k^p},\ p \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\dfrac{1}{k}\right)^p} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{p}{k}} = 1 \Rightarrow r = 1.$

2. Anwendung der 1. Formel für r:

   $$a_k = \underbrace{\frac{k!}{k^k} \approx \frac{k^k\, e^{-k}\,\sqrt{2\pi k}}{k^k}}_{\substack{\text{Stirling'sche Formel}\\ \text{(für große } k\text{–Werte)}}} = e^{-k}\,\sqrt{2\pi k} \ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{e^{-k}\,\sqrt{2\pi k}} = \frac{1}{e} \Rightarrow$$

   $r = e.$

   Anwendung der 2. Formel für r:

   $$r \ = \ \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \dfrac{k^k}{k!}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \left|\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^k\right|} =$$

   $$= \ \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \ = \ e\,.$$

3. $a_k = k^{\ln k} \ \Rightarrow$

   $$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^{\ln k}} \ = \ \lim_{k\to\infty} k^{\frac{\ln k}{k}} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{(\ln k)^2}{k}} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{2\ln k}{k}} =$$

   $$= \ \lim_{k\to\infty} e^{\frac{2}{k}} = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 1.$$

Lösung 5.5.3 (1) Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \ = \ \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(z+2)^n}{(n+2)^3 \cdot 4^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^3 \cdot 4^n}{(z+2)^{n-1}}\right| =$$

$$= \ \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(z+2)}{4} \cdot \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^3\right| = \frac{|z+2|}{4} \ < \ 1 \Leftrightarrow$$

$$|z+2| < 4,$$

d.h., die Reihe konvergiert absolut für alle z mit $|z+2| < 4$.

Für $|z+2| = 4$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{(n+1)^3 \cdot 4^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3},$$

d.h., die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+2| \le 4$.

(2) Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2\cdot 3^n}\cdot\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n\right|} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{3}\left|\frac{z+1}{z-1}\right| < 1 \Leftrightarrow \\ &\qquad \left|\frac{z+1}{z-1}\right| < 3.\end{aligned}$$

Für $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 3$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\xi^n \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{1}{3}\left(\frac{z+1}{z-1}\right),\ |\xi| = 1,$$

d.h., die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| \leq 3$.

Lösung 5.5.4 Wir betrachten den Hauptzweig der Logarithmusfunktion. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(z) &= \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \ln(1+z) - \ln(1-z),\\
f'(z) &= \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z},\\
f''(z) &= \frac{-1}{(1+z)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-z)^2},\\
f'''(z) &= \frac{(-1)(-2)}{(1+z)^3} + \frac{(-1)^3(-2)}{(1-z)^3},\\
f^{(4)}(z) &= \frac{(-1)(-2)(-3)}{(1+z)^4} + \frac{(-1)^4(-2)(-3)}{(1-z)^4},\\
&\ \ \vdots\\
f^{(k)}(z) &= \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+z)^k} + \frac{(k-1)!}{(1-z)^k}, \qquad k\in\mathbb{N} \Rightarrow\\
f^{(k)}(0) &= (-1)^{k+1}(k-1)! + (k-1)! = \\
&= (k-1)!\cdot\left((-1)^{k+1}+1\right) = \begin{cases} 2(k-1)!, & k\in\mathbb{N},\ \text{ungerade}\\ 0, & k\in\mathbb{N},\ \text{gerade}\end{cases} \qquad \Rightarrow\\
f(z) &= \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,z^k = \sum_{\substack{k=0\\ k\ \text{ungerade}}}^{\infty}\frac{(k-1)!}{k!}\,z^k = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1}.
\end{aligned}$$

Die Reihe für $f(z)$ hat die Form $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$ mit $a_k = \frac{2}{k},\ k$ ungerade, $k \in \mathbb{N}$. D.h., $r = 1$.

Lösung 5.5.5 In diesem Beispiel gilt für jede Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, daß die dazugehörige Folge $\left\{\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ nur einen Häufungspunkt hat. Deshalb ist

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2n+3}{2n+1}\cdot\dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1}}} = 2 \quad \Rightarrow\ r = 2,$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\cdot\dfrac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|-\dfrac{1}{2n(2n+1)}\right| = 0 \Rightarrow$

   $r = \infty$, die Reihe ist für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent,

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2n+2+3\sqrt{n+1}}{2n+3\sqrt{n}}}}\cdot\dfrac{(n+1)\,\ln(n+1)}{n\,\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 \Rightarrow$

   $r = 1$.

Lösung 5.5.6 (a) Notwendige Bedingung für die Konvergenz: Die Glieder der Reihe müssen eine Nullfolge bilden, d.h., es muß $|z| < 1$ gelten.

Wir zeigen, daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n\,(1-z) = z,\ |z| < 1$ gilt. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} S_n(z) &:= z(1-z) + z^2(1-z) + \ldots + z^n(1-z) = \\ &= z - z^2 + z^2 + \cdots + z^n - z^{n+1} = z - z^{n+1}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$|S_n(z) - z| = \left|-z^{n+1}\right| = |z|^{n+1} < \varepsilon$$

für $(n+1)\,\ln|z| < \ln\varepsilon$, d.h.,

$$n+1 > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|z|} \quad \text{oder} \quad n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|z|} - 1 \quad \text{für } z \neq 0.$$

Ist $z = 0$, so ist $S_n(z) = 0$ und $|S_n(0) - 0| < \varepsilon$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n\,(1-z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = z, \quad \text{für } |z| < 1.$$

(b) In (a) wurde gezeigt

$$|S_n(z) - z| < \varepsilon \quad \text{für } \; n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|z|} - 1, \;\; |z| < 1.$$

Damit konvergiert die Reihe auch für $|z| \le 1/2$. Es sei ε fest. Für $|z| \le 1/2$ tritt nun der größte Wert von $\frac{\ln\varepsilon}{\ln|z|} - 1$ bei $|z| = 1/2$ auf und beträgt $\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1/2)} - 1$. Daraus folgt

$$|S_n(z) - z| < \varepsilon,\; \forall\, n > N = \left\lceil \frac{\ln\varepsilon}{\ln(1/2)} - 1 \right\rceil,$$

wobei N *nur von* ε und *nicht* von der speziellen Wahl von z abhängt. Die Reihe konvergiert somit *gleichmäßig* für $|z| \le 1/2$.

Lösung 5.5.7 Konvergenzradius $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

(1) $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n z^n \Rightarrow \quad r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^n)}{n!} z^n \Rightarrow \quad r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n\ln n}{n!}}{\dfrac{(n+1)\,\ln(n+1)}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}} z^n \Rightarrow \quad r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = e.$$

Lösung 5.5.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow$

Die Reihe *konvergiert* für alle z mit $|z| < 1$.

Für $z = 1$ ergibt sich die harmonische Reihe, die divergent ist.

Sei $|z| = 1,\ z \neq 1$. Das Cauchy'sche Konvergenzkriterium: Gegeben sei eine Folge $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Folge konvergiert, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon): \ \ \forall\, m,\, k > N(\varepsilon) \Rightarrow |S_m - S_k| < \varepsilon.$$

Es sei $S_n := \sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}\, z^l, \quad |z| = 1,\, z \neq 1.$

Können wir zeigen, daß unsere Folge das Cauchy'sche Konvergenzkriterium erfüllt, so konvergiert sie und die Behauptung ist bewiesen. Zu zeigen ist:

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon): \ \ \forall\, m,\, k > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$$|S_m - S_k| = \left| \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l}\, z^l - \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l}\, z^l \right| = \left| \sum_{l=k+1}^{m} \frac{1}{l}\, z^l \right| < \varepsilon,$$

wobei o.B.d.A. $m > k$ gewählt wurde.

Wir schätzen zuerst $(1 - z) \sum\limits_{n=k}^{m} \frac{z^n}{n}$, vgl. Hinweis, ab:

$$\begin{aligned}
|z - 1| \left| \sum_{n=k}^{m} \frac{z^n}{n} \right| \quad &= \quad \left| \sum_{n=k-1}^{m-1} \frac{z^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=k}^{m} \frac{1}{n}\, z^{n+1} \right| \leq \\
&\leq \quad \left| \frac{z^k}{k} \right| + \left| \frac{z^{m+1}}{m} \right| + \left| \sum_{n=k}^{m-1} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)} \right| \leq \\
&\leq \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \sum_{n=k}^{m-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=k}^{m-1} \frac{1}{n+1} = \frac{2}{k} \Leftrightarrow \\
\left| \sum_{n=k}^{m} \frac{1}{n}\, z^n \right| \quad &\leq \quad \frac{2}{k\, |z - 1|} \Leftrightarrow \\
\left| \sum_{n=k+1}^{m} \frac{1}{n}\, z^n \right| \quad &\leq \quad \frac{2}{(k+1)\, |z - 1|} \ < \ \varepsilon,
\end{aligned}$$

$(\forall\, z \neq 1$ und $|z| = 1)$ falls $k,\, m > N(\varepsilon)$, wobei $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{2}{|z-1|\varepsilon} - 1 \right\rceil$.

5.6 Laurentreihen, Residuensatz

Lösung 5.6.1 (1) $\cosh z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \ \Rightarrow \ f(z) = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+2)!},$

d.h, $f(z)$ hat bei $z_0 = 0$ eine *hebbare Singularität* und ist mit

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1-\cosh z}{z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

analytisch in $\mathbb{C}$.

(2) $f(z)$ besitzt bei

$$\begin{aligned} z_0 &= 4 \quad \text{einen Pol 2. Ordnung,} \\ \left.\begin{aligned} z_0 &= i \\ z_0 &= 1-2i \end{aligned}\right\} & \quad \text{einen einfachen Pol,} \end{aligned}$$

weil 4, i und $1-2i$ keine Nullstellen des Zählers sind.

(3) $f(z) = 1 - \dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{2!(z-1)^4} - \ldots$ und der Hauptteil hat unendlich viele, nicht verschwindende Terme, d.h., $f(z)$ hat eine *wesentliche Singularität* bei $z_0 = 1$

Lösung 5.6.2 1. $f(z) = \cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ und

$\sin z = 0$ für $z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \cos z = 0$ für $z = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

$\cot z$ besitzt bei $z_0 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, Polstellen 1. Ordnung, weil die Nullstellen des Nenners keine Nullstellen des Zählers sind und weil für jedes feste $k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname*{Res}_{z_0=k\pi} f(z) = \lim_{z\to k\pi} (z-k\pi)\frac{\cos z}{\sin z} = \lim_{z\to k\pi} \frac{\cos z - (z-k\pi)\sin z}{\cos z} = 1$$

gilt.

2. $f(z)$ hat bei $z_0 = 3$ einen Pol der Ordnung 2,

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z_0=3} f(z) &= \lim_{z\to 3} \frac{d}{dz}\left((z-3)^2 \cdot \frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}\right) = \lim_{z\to 3} \frac{d}{dz}\left(ze^{zt}\right) = \\ &= \lim_{z\to 3}\left(e^{zt} + zte^{zt}\right) = e^{3t} + 3te^{3t}. \end{aligned}$$

Lösung 5.6.3 (a) (1) $z = 0$ einfacher Pol; $z = \pm 2i$ Pole zweiter Ordnung;

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z^2}+4\right)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{z^5}{(1+4z^2)^2} = 0.$$

(2) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{z\to 2n\pi i} (z - 2n\pi i)\,\frac{z}{e^z - 1} = 2n\pi i \lim_{z\to 2n\pi i} \frac{1}{e^z} = 2n\pi i \ \Rightarrow$$

die Stellen $z = 2n\pi i$ sind einfache Pole. Für $n = 0$ kann auch eine hebbare Singularität vorliegen:

$$f(z) = \frac{z}{z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots} = \frac{1}{1 + \dfrac{z}{2!} + \dfrac{z^2}{3!} + \ldots}\ ,$$

d.h., $z = 0$ ist eine hebbare Singularität mit $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$.

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{1/z}{(e^{1/z} - 1)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z(e^{1/z} - 1)} = 0,$$

weil $e^{\frac{1}{z}}$ schneller gegen ∞ strebt als z gegen 0.

(3) $z = 0$ und die Nullstellen von $\sin z$, d.h., $z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, sind Singularitäten der Funktion.

Wegen

$$\lim_{z\to 0} z\left(\cot\, z - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0} z\,\frac{\cos z}{\sin z} - 1 = \lim_{z\to 0} \cos z - 1 = 0,$$

kann in $z = 0$ sogar eine hebbare Singularität vorliegen, während aus

$$\lim_{z\to k\pi} (z - k\pi)\left(\cot z - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to k\pi} (z - k\pi)\,\frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 1$$

folgt, daß $z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ einfache Pole sind.

Es gilt

$$\cot z - \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}\,z - \frac{1}{45}\,z^3 - \ldots - \frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\,z - \frac{1}{45}\,z^3 - \ldots,$$

d.h., aufgrund dieser Darstellung bestätigt sich, daß in $z = 0$ eine hebbare Singularität vorliegt.

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$; im Unendlichen liegt eine wesentliche Singularität vor.

(b) (1) $z_0 = 2$,

$$f(z) = z^3\left(1 - \frac{1}{2!\,(z-2)^2} + \frac{1}{4!\,(z-2)^4} - \frac{1}{6!\,(z-2)^6} + \ldots\right);$$

Wir entwickeln z^3 um die Stelle $z_0 = 2$:

$$\begin{aligned} z^3 &= (z-2)^3 + A\,(z-2)^2 + B\,(z-2) + C,\ z=2 \ \Rightarrow\ C=8 \\ 3z^2 &= 3(z-2)^2 + 2A\,(z-2) + B,\ z=2 \ \Rightarrow\ B=12 \\ 6z &= 6(z-2) + 2A,\ z=2 \ \Rightarrow\ A=6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ f(z) = \ldots \left(-\frac{B}{2!} + \frac{1}{4!}\right) \frac{1}{z-2} \ldots \Rightarrow\ \operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = -\frac{143}{24}.$$

(2) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2-z-2} = \dfrac{2z+1}{(z+1)\,(z-2)}$;

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) &= \lim_{z\to-1} \frac{2z+1}{z-2} = \frac{1}{3}, \\ \operatorname*{Res}_{z=2} f(z) &= \lim_{z\to 2} \frac{2z+1}{z+1} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

(3) $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\left(z \cdot \dfrac{\sin z}{z^2}\right) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1.$

Achtung!

Wegen $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$ ist $z_0 = 0$ nur ein Pol *erster Ordnung* für

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}\textbf{!}$$

(4) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+1)\,(z-2)} = \dfrac{1}{z-2}$;

Die Stelle $z_0 = -1$ ist eine hebbare Singularität, in $z_0 = 2$ liegt ein Pol 1. Ordnung vor,

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = 1.$$

Lösung 5.6.4 1. $\dfrac{\cos z}{z^6} = \dfrac{1}{z^6} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-6}}{(2k)!} =$

$$= \sum_{k=-3}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+6)!} = \underbrace{\frac{1}{z^6} - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{24z^2}}_{\text{Hauptteil}} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+6)!} \Rightarrow$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^6} = 0.$$

2. $$\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{-1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \Big(\text{für } |z| < 1\Big)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}}_{\text{Hauptteil}} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2(z-1)} \;=\; -1.$$

3. $$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{-2k-1}}{(2k+1)!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2k+1}}}_{\text{Hauptteil, wesentliche Singularität}} \Rightarrow$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \sin\frac{1}{z} \;=\; 1.$$

Lösung 5.6.5 (a) $g(z)$ hat Nullstelle der Ordnung $m < \infty$ an $z = z_0 \Rightarrow$

$g(z) = (z-z_0)^m g_1(z)$ mit $g_1(z_0) \neq 0$, g_1 analytisch in einer Umgebung von $z_0 \Rightarrow$

$$g'(z) = m(z-z_0)^{m-1} g_1(z) + (z-z_0)^m g_1'(z) \Rightarrow$$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{g_1'(z)}{g_1(z)}, \quad g_1(z_0) \neq 0 \Rightarrow$$

$\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ hat Pol erster Ordnung an $z = z_0$, d.h.,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{g'(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \frac{g'(z)}{g(z)} = m. \qquad \square$$

(b) $g(z)$ hat Pol der Ordnung $m < \infty$ an $z = z_0 \Rightarrow$

$g(z) = \dfrac{g_1(z)}{(z-z_0)^m}$ mit $g_1(z_0) \neq 0$, $g_1(z)$ analytisch in einer Umgebung von $z_0 \Rightarrow$

$$g'(z) = \frac{g_1'(z)}{(z-z_0)^m} - \frac{m g_1(z)}{(z-z_0)^{m-1}} \Rightarrow$$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{g_1'(z)}{g_1(z)} - \frac{m}{z-z_0} \Rightarrow$$

$\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ hat Pol erster Ordnung an $z = z_0$, d.h., $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{g'(z)}{g(z)} = -m.$ $\square$

Lösung 5.6.6 Die gesuchte Laurentreihe gewinnt man am einfachsten durch elementare Umformungen (Partialbruchzerlegung und geometrische Reihe):

(i) Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{1}{z(z-1)\,(z-2)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2\,(z-2)}.$$

(ii) Entwicklung von $\dfrac{1}{z-1}$ und $\dfrac{1}{z-2}$ nach Potenzen von z im Kreisring $1 < |z| < 2$:

- Für $|z| > 1$ ist $\dfrac{1}{|z|} < 1$ und daher

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

mit der konvergenten geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)}.$$

- Für $|z| < 2$ ist $\dfrac{|z|}{2} < 1$ und daher

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

mit der konvergenten geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)}\, z^n.$$

Im Kreisring $1 < |z| < 2$ lautet die Laurent–Entwicklung um $z_0 = 0$

$$\frac{1}{z\,(z-1)\,(z-2)} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n - \frac{1}{2}\, z^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+2)}\, z^n.$$

Lösung 5.6.7 $f(z)$ hat an $z_0 = 0$ einen Pol k–ter Ordnung, d.h.,

$$\lim_{z \to 0} z^k\, f(z) = C$$

mit einer Konstanten C, $C \neq 0$, $C \neq \infty$.

Es sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, also $p\big(f(z)\big) = a_0 + a_1 f(z) + \ldots + a_1\big(f(z)\big)^n$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} z^{nk} q(z) &= \lim_{z\to 0} z^{nk}\left(a_0 + a_1 f(z) + \ldots + a_n\big(f(z)\big)^n\right) = \\
&= \lim_{z\to 0}\left(a_0 z^{nk} + a_1 z^{nk} f(z) + \ldots + a_n z^{nk}\big(f(z)\big)^n\right) = \\
&= a_0 \underbrace{\lim_{z\to 0} z^{nk}}_{=0} + a_1 \underbrace{\lim_{z\to 0} z^{nk} f(z)}_{=0} + \ldots + \underbrace{a_n}_{\neq 0} \lim_{z\to 0}\left(z^k f(z)\right)^n = \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stetigkeit der} \\ \text{Potenzfunktion}}}{=} a_n \left(\lim_{z\to 0} z^k f(z)\right)^n = a_n C^n \quad (\neq 0,\ \neq \infty\,),
\end{aligned}$$

d.h., $q(z)$ hat an $z_0 = 0$ einen Pol der Ordnung nk.

Lösung 5.6.8 $f(z) := \dfrac{1}{1+z^2}$;

(a) Substituiere in $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ (geometrische Reihe) w durch $-z^2$ $\Rightarrow$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad \text{für } |z| < 1.$$

Überprüfe den Konvergenzradius $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$, d.h., die Reihe ist eine Taylorreihe um $z_0 = 0$ mit $r = 1$.

(b) $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)\,(z-i)}$ hat in i und $-i$ je einen einfachen Pol. Die Partialbruchzerlegung liefert

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{i}{2}\,\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\,\frac{1}{z+i} = -\frac{i}{2}\,\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\,\frac{1}{(z-i)+2i} = \\
&= -\frac{i}{2}\,\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\,\frac{1}{2i}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2i}(z-i)} = \\
&= -\frac{i}{2}\,\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2i}\right)^n \big(z-i\big)^n
\end{aligned}$$

d.h., die Laurentreihe um $z_0 = i$.

Konvergenzgebiet: In der Herleitung wurde wieder die geometrische Reihe verwendet. Diese Reihe konvergiert für

$$\left|\frac{1}{2i}\Big(z-i\Big)\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-i| < 2 \quad \Rightarrow r \;=\; 2,$$

was man auch aus

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(-\frac{1}{2i}\right)^n}{\left(-\frac{1}{2i}\right)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}|-2i| = 2,$$

sieht. Aus der Laurentreihe liest man ab,

$$\operatorname*{Res}_{z_0=i}\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = -\frac{i}{2}.$$

Lösung 5.6.9 Es gilt

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \cdots,$$

$$\cos z = \cosh(iz),\;\; i\sin z = \sinh(iz).$$

Daraus folgt

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{\cos z}{i\,\sin z} = i\,\frac{\cosh(iz)}{\sinh(iz)} = i\,\coth(iz) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\coth z &= \frac{1}{i}\,\cot(-iz) \quad \Rightarrow \quad \coth z = i\cot(iz) \Rightarrow \\
\coth z &= \frac{1}{z} + \frac{1}{3}\,z - \frac{1}{45}\,z^3 + \frac{2}{945} - \cdots .
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Laurentreihe für $\cot z$ kann man aus den Taylorreihen für $\sin z$ und $\cos z$ herleiten. Die Rechnung ist aber mühsam:

$$\cot z \;=\; \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{z^{2n}}{(2n)!}}{z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}} =$$

$$= \frac{1}{z} \frac{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}}{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n+1)!}} \qquad \Big(\text{Substituiere } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = u\Big)$$

$$= \frac{1}{z} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right) \frac{1}{1+u} \qquad (\text{wieder eine geometrische Reihe})$$

$$= \frac{1}{z} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m u^m\right) =$$

$$= \frac{1}{z} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}\right)^m\right).$$

Um z.B. die ersten 3 Glieder auszurechnen reicht es $m = 0$ und $m = 1$ zu betrachten:

$$\cot z = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) \cdot \left(1 - \big(-\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\big) + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \cdots .$$

Konvergenzgebiet: $\cot z$ hat Pole bei den Nullstellen von $\sin z$, 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ... Es wurde die geometrische Reihe verwendet, d.h., das Konvergenzgebiet ist der Kreisring $0 < |z| < \pi$.

Lösung 5.6.10 Wir verwenden Beispiel 5.6.9:

$$\cot z \coth z = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \cdots\right) \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} \left(-\frac{2}{45} z^3\right) - \frac{1}{9} z^2 \pm \cdots = \frac{1}{z^2} - \frac{7}{45} z^2 \pm \cdots \Rightarrow$$

$$\frac{\cot z \coth z}{z^3} = \frac{1}{z^5} - \frac{7}{45} \frac{1}{z} \pm \cdots \Rightarrow$$

$$\operatorname*{Res}_{z_0=0} \left(\frac{\cot z \coth z}{z^3}\right) = -\frac{7}{45}.$$

Lösung 5.6.11 $f(z) := \dfrac{g(z)}{h(z)}, \qquad g(z_0) \neq 0, \quad h(z_0) = 0, \quad h'(z_0) \neq 0;$

(a) Wegen $h(z_0) = 0$ hat $f(z)$ an der Stelle $z = z_0$ eine Singularität. Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} (z - z_0)\, f(z) &= \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)g(z)}{h(z)} = \text{„}\,\frac{0}{0}\,\text{“} = \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{de l'Hospital}}}{=} \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)g'(z) + g(z)}{h'(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} < \infty,
\end{aligned}$$

also liegt ein *Pol 1. Ordnung* vor.

(b) Aus (a) folgt unmittelbar

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

(c) An den Stellen $z_0 = n\pi,\ n \in \mathbb{N}$, hat $\sin z$ eine einfache Nullstelle; daher hat $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ dort je einen Pol 1. Ordnung, vgl (a). Nach (a), (b) ist

$$\operatorname*{Res}_{z=n\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\cos n\pi} = (-1)^n.$$

Lösung 5.6.12 $f(z) = \dfrac{1}{z}\, e^{(z-1)^{-1}}$;

Zwei singuläre Stellen:

1. $z_0 = 0$ ist ein Pol 1. Ordnung mit

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = e^{(z-1)^{-1}}\Big|_{z=0} = e^{-1},$$

2. $z_0 = 1$ ist eine wesentliche singuläre Stelle:
   Betrachte Laurentreihe um $z_0 = 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z}\, e^{(z-1)^{-1}} &= \frac{1}{(z-1)+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(z-1)^{-n} = \\
&= \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m\, (z-1)^m\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(z-1)^{-n}\right).
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten von $\frac{1}{z-1}$ ergeben sich für $m - n = -1 \Leftrightarrow n = m + 1$, d.h.,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(m+1)!} = 1 - 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{(m+1)!} =$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!} = \\
&= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!} = 1 - e^{-1} \; (= e^0 - e^{-1}) \Rightarrow \\
\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) &= 1 - e^{-1}.
\end{aligned}
$$

Lösung 5.6.13 1. $\oint\limits_C f(z)dz = \oint\limits_C \frac{dz}{(z-1)^2\,(1+z^2)} = \oint\limits_C \frac{dz}{(z-1)^2\,(z+i)\,(z-i)}$;

Der Integrand $f(z)$ hat an $z = 1$ einen Pol 2. Ordnung, an $z = \pm i$ einen Pol 1. Ordnung. Dabei liegen $z = 1$ und $z = +i$ innerhalb der geschlossenen Kurve C und $z = -i$ liegt außerhalb von C.

Daher folgt nach dem *Residuensatz:*

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) \right),$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) &= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \Big((z-1)^2\, f(z) \Big) = \lim_{z\to 1} \frac{-2z}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2}, \\
\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z\to i} (z-i)\, f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z-1)^2\,(z+1)} = \frac{1}{(i-1)^2\,(i+1)} = \frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

und damit

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi}{2}\, i\,.$$

2. $\oint\limits_C f(z)dz = \oint\limits_C \frac{e^{mz}}{(z-ai)\,(z-\frac{i}{a})}\,dz, \quad (-1 < a < 1,\; m \in \mathbb{R})$;

Der Integrand $f(z)$ hat je einen Pol erster Ordnung an $z = ai$ (innerhalb von C) bzw. $z = i/a$ (außerhalb von C).

Aus dem Residuensatz folgt

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ai} f(z),$$

wobei

$$\operatorname*{Res}_{z=ai} f(z) = \lim_{z\to ai} (z-ai)\, f(z) = \lim_{z\to ai} \frac{e^{mz}}{z-\frac{i}{a}} = \frac{e^{mi}}{i(a-\frac{i}{a})} \Rightarrow$$

$$\oint_C f(z)\,dz = \frac{2\pi i\, e^{ami}}{i(a-\frac{i}{a})} = \frac{2\pi a}{a^2-1}\Big(\cos am + i \sin am\Big).$$

Lösung 5.6.14 (1) $\tan \pi z = \dfrac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$,

$$\cos \pi z = 0 \Leftrightarrow \pi z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z_0 = \frac{1}{2} + k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

An den obigen Stellen z_0 verschwindet $\sin \pi z$ nicht, deshalb sind diese Stellen singuläre Stellen von $\tan \pi z$. Es gilt $(\cos \pi z)' = -\pi \sin \pi z\Big|_{z_0} \neq 0$ und deshalb sind die Stellen z_0 Pole erster Ordnung für $\tan \pi z$, siehe Beispiel 5.6.11. Innerhalb von C_n liegen $2n$ Stellen, nämlich

$$\Big\{z_0^{(1)}, \dots, z_0^{(2n)}\Big\} := \Big\{-\frac{1}{2} - (n-1), \dots, -\frac{1}{2} - 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 1, \dots, \frac{1}{2} + (n-1)\Big\}$$

und

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=z_0} \tan \pi z &= \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\,\frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} = \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{\sin \pi z + \pi(z-z_0)\cos \pi z}{-\pi \sin \pi z} = -\frac{1}{\pi}, \quad \forall\, z_0.
\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz gilt

$$\begin{aligned}
\oint_{C_n} \tan \pi z\, dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^{2n} \operatorname*{Res}_{z=z_0^{(k)}} \tan \pi z = 2\pi i \sum_{k=1}^{2n} \Big(-\frac{1}{\pi}\Big) = \\
&= -2\pi i \cdot \frac{2n}{\pi} = -4ni.
\end{aligned}$$

(2) Die Nullstellen des Nenners sind $z_0 = -2,\ z_1 = 2i,\ z_2 = -2i,\ z_3 = 0$. Da der Zähler an diesen Stellen nicht verschwindet, sind $z_1 = 2i,\ z_2 = -2i$, Pole erster Ordnung, $z_3 = 0$, Pol zweiter Ordnung und $z_0 = -2$, Pol dritter Ordnung.

Innerhalb des Integrationsweges liegt nur (zum Glück!) $z_1 = 2i$ und damit ist das einzig relevante Residuum

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) &= \frac{2\,(2i)^2+5}{(2i+2)^3\,(2i+2i)\,(2i)^2} = \frac{3}{16i\,(2i+2)^3} = \\
&= \frac{3}{16\cdot 8\,i\,(1+i)^3} = \frac{3}{128\,i\,(1+i)^3}.
\end{aligned}$$

Schließlich,

$$\oint\limits_C \frac{2z^2+5}{(z+2)^3\,(z^2+4)\,z^2}\,dz = 2\pi i\,\frac{3}{128\,i\,(1+i)^3} = \frac{3\pi}{64\,(1+i)^3}.$$

(3) Die Nullstellen des Nenners sind $z_0 = 0,\ z_1 = i,\ z_2 = -i$ und da dies keine Nullstellen des Zählers sind, liegen Pole 1. Ordnung vor. Alle drei liegen innerhalb des Integrationsweges, d.h.,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{e^{zt}}{z\,(z^2+1)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\,2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)\right) = \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{e^{zt}}{z^2+1} + \lim_{z\to i}\frac{e^{zt}}{z\,(z+i)} + \lim_{z\to -i}\frac{e^{zt}}{z\,(z-i)} = \\
&= 1 + \frac{e^{it}}{2i^2} + \frac{e^{-it}}{2i^2} = \\
&= 1 - \frac{1}{2}\Big(\cos t + i\sin t + \cos t - i\sin t\Big) = 1 - \cos t.
\end{aligned}$$

Lösung 5.6.15 1. Beispielklasse:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}; \qquad P,\ Q \ \text{ Polynome über } \mathbb{R}.$$

In unserem Fall ist

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} =: \frac{P(z)}{Q(z)},$$

d.h., $\mathrm{Grad}P(z) < \mathrm{Grad}Q(z)$ und die Nullstellen von $Q(z),\ z_{1,2,3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\pm 1 \pm i\Big)$, sind nicht reell. Damit gilt (vgl. Skriptum)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\substack{z=z_k \\ \mathrm{Im}(z_k)>0}} f(z) = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z)\right),$$

wobei $z_1 := \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(1+i\Big),\ z_2 := \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(-1+i\Big)$.

Da z_1 und z_2 Pole erster Ordnung sind, gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\,\frac{z^2}{(z-z_1)\,(z-z_2)\,(z-z_3)\,(z-z_4)} = \\
&= \frac{z_1^2}{(z_1-z_2)\,(z_1-z_3)\,(z_1-z_4)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,(1+i)},
\end{aligned}$$

analog

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{z_2^2}{(z_2 - z_1)\,(z_2 - z_3)\,(z_2 - z_4)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,(-1+i)},$$

woraus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = 2\pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\,(1+i)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\,(-1+i)} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

folgt.

Lösung 5.6.16 2. Beispielklasse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,e^{ix}; \quad P,\, Q \text{ Polynome über } \mathbb{R}.$$

(1) Hier ist

$$f(z) = \frac{1}{z-ib}\,e^{iaz} =: \frac{P(z)}{Q(z)}\,e^{iaz},$$

wobei Grad$P(z) <$ Grad$Q(z)$ und die Nullstelle von $Q(z)$, $z_0 = ib$ ist nicht reell. Da $\operatorname{Re} b > 0$ ist, gilt $\operatorname{Im} z_0 = \operatorname{Re} b > 0$. Damit ist (vgl. Skriptum)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k>0}} f(z) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ib} \frac{e^{iaz}}{z-ib} = \\ &= 2\pi i \lim_{z\to ib} (z-ib)\,\frac{e^{iaz}}{z-ib} = 2\pi i\, e^{-ab} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\, e^{-ab}, \quad a \in \mathbb{R}_+.$$

□

(2) Alles wie in (1), nur die Nullstelle des Nenners, $z_0 = -ib$, hat für $\operatorname{Re} b > 0$ einen negativen Imaginärteil, woraus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x+ib}\,dx = 2\pi i \underbrace{\sum_{n=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k>0}}}_{\text{leer}} f(z) \equiv 0,$$

folgt. □

Lösung 5.6.17 Zu zeigen ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{5-4\cos\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{12}.$$

Beweis: Es handelt sich um ein Integral aus der 3. Beispielklasse. Standardsubstitution lautet

$$\begin{aligned}
z &= e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad dz = ie^{i\varphi}\,d\varphi; \quad d\varphi = \frac{1}{iz}\,dz,\\
\cos 3\varphi &= \frac{e^{3i\varphi}+e^{-3i\varphi}}{2} = \frac{z^3+z^{-3}}{2},\\
\cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2},
\end{aligned}$$

d.h.,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{5-4\cos\varphi}\,d\varphi &= \int_{|z|=1} \frac{z^3+z^{-3}}{2\,(5-4(z+z^{-1})/2)}\cdot\frac{1}{iz}\,dz =\\
&= \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{z^3(5z-2z^2-2)}\,dz =\\
&= -\frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)\,(z-2)}\,dz.
\end{aligned}$$

Der Integrand hat die folgenden Pole:

$$\begin{array}{lll}
(1) & z=0, & \text{3. Ordnung},\\
(2) & z=1/2, & \text{1. Ordnung},\\
(3) & z=2, & \text{1. Ordnung}.
\end{array}$$

Innerhalb des Integrationsweges liegen nur die Pole (1) und (2). Daher gilt:

$$\begin{aligned}
&\oint_{|z|=1} \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)\,(z-2)}\,dz =\\
&\qquad = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)\,(z-2)} + \operatorname*{Res}_{z=1/2}\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)\,(z-2)}\right)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)} &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left(z^3 \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{8z^7 - 35z^6 + 12z^5 - 4z + 5}{(2z^2-5z+2)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{4} = \frac{21}{8}, \\
\operatorname*{Res}_{z=1/2} \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)} &= \frac{(1/2)^6+1}{(1/2)^3 \cdot 2 \cdot (1/2-2)} = \frac{65/64}{-1/4 \cdot 3/2} = -\frac{65}{24}; \\
\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\, dz &= 2\pi i \left(\frac{21}{8} - \frac{65}{24} \right) = \frac{i\pi}{6} \Rightarrow \\
\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{5 - 4\cos\varphi}\, d\varphi &= -\frac{1}{2i} \cdot \frac{i\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

□

Lösung 5.6.18 Substitution $z = R\, e^{i\varphi};\ \ dz = iRe^{i\varphi}\, d\varphi$ führt auf

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}\, dz = \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(R\, e^{i\varphi}+i)}{R^2 e^{2i\varphi}+1}\, iRe^{i\varphi}\, d\varphi.$$

Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(R\, e^{i\varphi}+i)}{R^2 e^{2i\varphi}+1}\, iRe^{i\varphi}\, d\varphi \right| &\le \int\limits_0^{\pi} \left| \frac{\ln(R\, e^{i\varphi}+i)}{R^2 e^{2i\varphi}+1}\, iRe^{i\varphi} \right| d\varphi \le \\
&\le \int\limits_0^{\pi} \frac{|\ln(R\, e^{i\varphi}+i)|\ R}{|R^2 e^{2i\varphi}+1|}\, d\varphi;
\end{aligned}$$

1. $\ln\left(Re^{i\varphi}+i\right) = \ln\left|Re^{i\varphi}+i\right| + i\arg\left(Re^{i\varphi}+i\right),$

   dabei ist

   $$\left|Re^{i\varphi}+i\right|^2 = (R\cos\varphi)^2 + (R\sin\varphi+1)^2 = \underbrace{R^2 + 2R\sin\varphi + 1 \le (R+1)^2}_{\text{wegen } \sin\varphi\in[0,1]} \Leftrightarrow$$

   $$\left|Re^{i\varphi}+i\right| \le R+1$$

und $\arg\left(Re^{i\varphi}+i\right) \in (0,\pi)$, woraus

$$\left|\ln\left(Re^{i\varphi}+i\right)\right| \leq \sqrt{\ln^2(R+1)+\pi^2}, \quad \forall\, \varphi \in [0,\pi], \tag{5.3}$$

folgt.

2. $R^2e^{2i\varphi}+1 = (R^2\cos 2\varphi+1)+iR^2\sin 2\varphi \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\left|R^2e^{2i\varphi}+1\right|^2 &= R^4\cos^2 2\varphi + 2R^2\cos 2\varphi + 1 + R^4\sin^2 2\varphi = \\
&= \underbrace{R^4+2R^2\cos 2\varphi+1 \geq R^4-2R^2+1}_{\text{wegen } \cos 2\varphi \geq -1} \\
&= \left(R^2-1\right)^2.
\end{aligned}$$

Wähle $R>1$, dann ist

$$\left|R^2e^{2i\varphi}+1\right| \geq R^2-1, \quad \forall\, \varphi \in [0,\, \pi]. \tag{5.4}$$

Damit ist (Einsetzen von (5.3) und (5.4) in die Abschätzung)

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\pi \frac{\ln\left(Re^{i\varphi}+i\right)}{R^2e^{2i\varphi}+1}\, iRe^{i\varphi}\, d\varphi\right| &\leq \int_0^\pi \frac{R\sqrt{\ln^2(R+1)+\pi^2}}{R^2-1}\, d\varphi = \\
&= \frac{\pi R\sqrt{\ln^2(R+1)+\pi^2}}{R^2-1}.
\end{aligned}$$

Schließlich hat man mit $R>1$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{R\to\infty}\left|\int_0^\pi \frac{\ln\left(Re^{i\varphi}+i\right)}{R^2e^{2i\varphi}+1}\, iRe^{i\varphi}\, d\varphi\right| \leq \lim_{R\to\infty}\frac{\pi R\sqrt{\ln^2(R+1)+\pi^2}}{R^2-1} = \\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{\pi R\ln(R+1)}{R^2} = \pi\lim_{R\to\infty}\frac{\ln(R+1)+\frac{R}{R+1}}{2R} = \\
&= \pi\lim_{R\to\infty}\frac{\ln(R+1)}{2R} = \pi\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2(R+1)} = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^\pi \frac{\ln\left(Re^{i\varphi}+i\right)}{R^2e^{2i\varphi}+1}\, iRe^{i\varphi}\, d\varphi\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{\ln\left(Re^{i\varphi}+i\right)}{R^2e^{2i\varphi}+1}\, iRe^{i\varphi}\, d\varphi = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{\ln(z+i)}{z^2+1}\, dz = 0. \qquad \square$$

Lösung 5.6.19 (a) $\ln(z^2+1) = \ln(z-i)\,(z+i) = \ln(z-i) + \ln(z+i) =$

$$= \ln(-1)\,(i-z) + \ln(z+i) = \ln(-1) + \ln(i-z) + \ln(z+i) =$$

$$= \ln(i+z) + \ln(i-z) - i\pi. \qquad \square$$

(b) Wir verwenden die Identität

$$\ln(z^2+1) = \ln(i-z) + \ln(i+z) - i\pi$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx &= \int_0^\infty \frac{\ln(i-x)}{x^2+1}\,dx + \int_0^\infty \frac{\ln(i+x)}{x^2+1}\,dx - i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \\
&= \int_{-\infty}^0 \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}\,dx + \int_0^\infty \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}\,dx - i\pi \arctan x\Big|_0^\infty = \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}\,dx - i\,\frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

Um das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}\,dx$ zu berechnen, wählen wir den Integrationsweg so, daß $R > 2$ ist. Dann ist $z_0 = i$ der einzige Pol des Integranden, der innerhalb von C liegt. Der Residuensatz liefert

$$\oint_C \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i\,\frac{\ln(2i)}{2i} = \pi\left(\ln 2 + i\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Andererseits

$$\oint_C \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}\,dx + \int_{\Gamma_R} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}\,dz,$$

und wenn man beiderseitig $R \to \infty$ gehen läßt, erhält man mit der Aussage des Beispiels 5.6.18 :

$$\pi\left(\ln 2 + i\,\frac{\pi}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}\,dx.$$

Schließlich hat man

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}\,dx - i\,\frac{\pi^2}{2} = \\
&= \pi\left(\ln 2 + i\,\frac{\pi}{2}\right) - i\,\frac{\pi^2}{2} = \pi\,\ln 2.
\end{aligned} \qquad \square$$

Lösung 5.6.20 Wir betrachten

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz,$$

wobei C die Kurve aus Abb. 2.3 ist. Wir zerlegen C in vier Teilstücke

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \Big\{z \in \mathbb{R};\ -R \le z = x \le -\varepsilon\Big\},\\
C_2 &:= \Big\{z \in \mathbb{C};\ |z| = \varepsilon,\ \arg z \in (0,\pi)\Big\},\\
C_3 &:= \Big\{z \in \mathbb{R};\ \varepsilon \le z = x \le R\Big\},\\
C_4 &:= \Big\{z \in \mathbb{C};\ |z| = R,\ \arg z \in (0,\pi)\Big\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$0 = \oint_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{C_4} \frac{e^{iz}}{z}\,dz, \tag{5.5}$$

da $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ analytisch auf und innerhalb von C ist. Weiters,

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-ix}}{x}\,dx,\\
\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz &= \int_{\pi}^{0} e^{i\left(\varepsilon e^{i\varphi}\right)}\,i\,d\varphi,\\
\int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z}\,dz &= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx,\\
\int_{C_4} \frac{e^{iz}}{z}\,dz &= \int_{0}^{\pi} e^{i\left(Re^{i\varphi}\right)}\,i\,d\varphi,
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\pi e^{iRe^{i\varphi}}\,i\,d\varphi\right| &\le \int_0^\pi \left|e^{iRe^{i\varphi}}i\right|\,d\varphi =\\
&= \int_0^\pi e^{-R\sin\varphi}d\varphi \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{R\varphi}{2}}\,d\varphi = \frac{4}{R}\left(1 - e^{-\frac{\pi R}{4}}\right) \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \;=\; 0.$$

Wir lassen $R \to \infty$ in (5.5) gehen:

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; -\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x}\, dx + \int\limits_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon e^{i\varphi}}\, i\, d\varphi + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \\ &=\; \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} 2i\, \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix}\, dx + \int\limits_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon e^{i\varphi}}\, i\, d\varphi \Leftrightarrow \\ \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \;&=\; \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\varphi}}\, d\varphi. \end{aligned}$$

Wir lassen nun $\varepsilon \to 0$ gehen. Dann ist

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0}^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\varphi}}\, d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} e^{i\varepsilon e^{i\varphi}}\, d\varphi = \frac{1}{2}\,\pi.$$

Zu beachten! Man darf hier „lim“ und „$\int$“ vertauschen, weil der Integrand für $\varepsilon \to 0$ *gleichmäßig* in $\varphi \in [0,\pi]$ gegen Eins konvergiert. (Versuchen Sie, diese Behauptung zu beweisen!)

Lösung 5.6.21 Nach Beispiel 5.6.5 gilt für die Funktion

$$g(z) \;:=\; \frac{d}{dz}\Big(\ln\big(f(z)\big)\Big) \;=\; \frac{f'(z)}{f(z)} :$$

$$f(z) \text{ hat } \left\{ \begin{array}{l} m-\text{fache Nullstelle} \\ m-\text{fachen Pol} \end{array} \right\} \quad \text{an } z_0 \qquad \Rightarrow$$

$$g(z) \text{ hat an } z_0 \text{ einfachen Pol mit } \left\{ \begin{array}{l} \operatorname*{Res}_{z=z_0} g(z) = m \\ \operatorname*{Res}_{z=z_0} g(z) = -m \end{array} \right\}.$$

Liegen innerhalb von G n Nullstellen (Vielfachheiten $\tilde{m}_l,\ l = 1(1)n$) und p Pole (Ordnungen $\hat{m}_k,\ k = 1(1)p$), so liefert der Residuensatz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma=\partial G} g(z)\, dz \;&=\; \sum_{z_0\in G} \operatorname*{Res}_{z=z_0} g(z) = \\ &=\; \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \ldots + \tilde{m}_n - \hat{m}_1 - \hat{m}_2 - \ldots - \hat{m}_p = \\ &=\; \sum_{l=1}^{n} \tilde{m}_l - \sum_{k=1}^{p} \hat{m}_k. \end{aligned}$$

□

Falls $\tilde{m}_l = \hat{m}_k = 1,\ \forall\, l,\ k$ gilt, hat man

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma=\partial G} g(z)\, dz = n - p.$$

Lösung 5.6.22 Eine Möglichkeit, den Residuensatz anzuwenden, besteht hier darin, den Zähler des Integranden als Realteil einer komplexen Funktion zu interpretieren:

$$\cos n\varphi = \mathrm{Re}\left(e^{in\varphi}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\varphi}\right)^n .$$

Also

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos n\varphi}{1 + 2a\cos\varphi + a^2}\, d\varphi &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Re}\,(e^{i\varphi})^n}{1 + a\,(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + a^2}\, d\varphi = \\
&= \mathrm{Re} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(e^{i\varphi})^n}{1 + a\,(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + a^2}\, d\varphi = \mathrm{Re}\ I.
\end{aligned}$$

Für das Integral I erhalten wir mittels der Substitution $z = e^{i\varphi},\ dz = iz\, d\varphi$:

$$\begin{aligned}
I &= \oint\limits_{|z|=1} -\frac{i}{z} \cdot \frac{z^n}{1 + a\,(z + 1/z) + a^2}\, dz = -\frac{i}{a} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^n}{z/a + z^2 + 1 + az}\, dz = \\
&= -\frac{i}{a} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^n}{(z+a)\,(z + 1/a)}\, dz.
\end{aligned}$$

Für $a \in (-1, 1),\ a \neq 0$, besitzt der Integrand von I je einen Pol erster Ordnung für $z = -a$ und $z = -1/a$; davon liegt $z = -a$ innerhalb des Einheitskreises $|z| = 1$.

Nach dem Residuensatz ergibt sich

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi i \left(-\frac{i}{a}\right) \operatorname*{Res}_{z=-a} \frac{z^n}{(z+a)\cdot(z+1/a)} = \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{(-a)^n}{-a + 1/a} = \\
&= 2\pi\, \frac{(-a)^n}{1 - a^2} \in R,
\end{aligned}$$

und dieser Wert (da reell) ist auch der Wert des gesuchten Integrals.

Im Sonderfall $a = 0$ ergibt sich leicht

$$I = \begin{cases} -i \oint\limits_{|z|=1} z^{n-1}\,dz = 0, \quad \text{falls } n \geq 1 \quad \text{(Cauchy'scher Integralsatz!)} \\ -i \oint\limits_{|z|=1} z^{-1}\,dz = 2\pi, \quad \text{falls } n \neq 0 \quad \text{(Residuensatz!)} \end{cases}$$

Lösung 5.6.23 Zu berechnen ist

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Wir benützen den Integrationsweg aus Beispiel 5.6.20, vgl. Abb. 2.3, und bezeichnen auch die Teilstrecken von C wie dort. Die Nullstellen des Nenners, $z = \pm i$, sind doppelte Pole, wobei nur $z_0 = i$ innerhalb von C mit $0 < \varepsilon < 1 < R$ liegt. Nach dem Residuensatz ist dann

$$\begin{aligned} \oint\limits_C \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\right) = \\ &= 2\pi i \lim_{z\to i}\left(\frac{d}{dz}(z-i)^2\frac{\ln z}{(z-i)^2(z+i)^2}\right) = 2\pi i\frac{i}{4}\left(1 - i\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -\frac{\pi}{2}\left(1 - i\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Weiters,

$$\begin{aligned} \int\limits_{C_1} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,dz &= \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,dz = -\int\limits_R^\varepsilon \frac{\ln(-z)}{(1+z^2)^2}\,dz = \\ &= \int\limits_\varepsilon^R \frac{\ln z + i\pi}{(1+z^2)^2}\,dz = \int\limits_\varepsilon^R \frac{\ln x + i\pi}{(1+x^2)^2}\,dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{C_2} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,dz &= \int\limits_\pi^0 \frac{\ln\left(\varepsilon e^{i\varphi}\right)}{\left(1+\varepsilon^2 e^{2i\varphi}\right)^2}\,i\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi = \\ &= -i\int\limits_0^\pi \frac{\ln\varepsilon + i\varphi}{\left(1+\varepsilon^2 e^{2i\varphi}\right)^2}\,\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi \quad \text{mit} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_2}\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,dz = 0, \end{aligned}$$

$$\int\limits_{C_3} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\, dz \quad = \quad \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx,$$

$$\int\limits_{C_4} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\, dz \quad = \quad i \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\ln R + i\varphi}{\left(1+R^2 e^{2i\varphi}\right)^2}\, Re^{i\varphi}\, d\varphi \quad \text{mit} \quad \lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_4} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\, dz = 0.$$

Die obigen Aussagen für $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{C_2} \ldots$ und $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_4} \ldots$ gewinnt man ähnlich wie in Beispiel 5.6.20.

Wir fassen zusammen:

$$-\frac{\pi}{2}\left(1 - i\,\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \oint\limits_{C} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\, dz = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx + i\pi \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

Das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$ ist in der 1. Beispielklasse (alle Voraussetzungen sind erfüllt) und deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx \quad &= \quad 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(1+z^2)^2} = \\
&= \quad 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2\, \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right) = \frac{2\pi i}{4i} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

folgt

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} + i\,\frac{\pi^2}{4} \quad &= \quad 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx + i\pi\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \\
&\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Lösung 5.6.24 3. Beispielklasse: Standardsubstitution $z := e^{it},\ t \in [0,\, 2\pi]$;

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{(a + b\cos t)^2}\, dt \quad = \quad \frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\, \frac{1}{\left(a + \frac{b}{2}\,(z + z^{-1})\right)^2}\, dz =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z}{(az + \frac{b}{2}z^2 + \frac{b}{2})^2}\, dz = \\ &= \frac{1}{i} \cdot \frac{4}{b^2} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z}{\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right)^2}\, dz. \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nenners:

$$z^2 + \frac{2a}{b} z + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; z_{1,2} = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$$

sind wegen $a > b,\ a^2/b^2 > 1$, reell. Es ist

$$z_1 = -\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \;<\; -1,$$

und damit liegt z_1 außerhalb des Einheitskreises. Weiters,

$$z_2 = -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \;<\; -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} \;=\; -\frac{a}{b} + \left|\frac{a}{b}\right| \;=\; 0,$$

$$z_2 = -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \;>\; -1 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) > \left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2}{b^2} - 1 > \frac{a^2}{b^2} - 2\,\frac{a}{b} + 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{b} > 1, \text{ wahre Aussage}$$

und damit liegt z_2 innerhalb des Einheitskreises.

Da $z_2 = -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$ ein doppelter Pol ist, folgt

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{z}{(z - z_1)^2 \cdot (z - z_2)^2} = \lim_{z \to z_2} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z - z_1)^2}\right) = \frac{a}{4b} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)^3}$$

und endgültig

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b\cos t)^2}\, dt = 2\pi i \cdot \frac{4}{ib^2} \cdot \frac{a}{4b\left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)^3} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}, \qquad 0 < b < a.$$

Lösung 5.6.25 Das Integral ist in der 1. Beispielklasse, die Voraussetzungen sind erfüllt;

$$\begin{aligned} z^6 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; z \;&=\; \sqrt[6]{-1} \;=\; \sqrt[6]{e^{i\pi}} = \\ &= \left\{\underbrace{e^{i\pi/6},\ e^{3i\pi/6},\ e^{5i\pi/6}},\ e^{7i\pi/6},\ e^{9i\pi/6},\ e^{11i\pi/6}\right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

diese drei einfachen Pole von $\frac{1}{z^6+1}$ liegen innerhalb von C.

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=e^{i\pi/6}} f(z) &= \lim_{z\to e^{i\pi/6}} \left\{\left(z-e^{i\pi/6}\right)\frac{1}{z^6+1}\right\} = \lim_{z\to e^{i\pi/6}} \frac{1}{6z^5} = \\
&= \frac{1}{6e^{5i\pi/6}} = \frac{1}{6}\,e^{-5i\pi/6}, \\
\operatorname*{Res}_{z=e^{3i\pi/6}} f(z) &= \frac{1}{6}\,e^{-5i\pi/2}, \\
\operatorname*{Res}_{z=e^{5i\pi/6}} f(z) &= \frac{1}{6}\,e^{-25i\pi/6}.
\end{aligned}$$

Residuensatz:

$$\oint_C \frac{1}{z^6+1}\,dz = \frac{2\pi i}{6}\left(e^{-5\pi i/6}+e^{-5i\pi/2}+e^{-25i\pi/6}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Damit folgt (5.6). Trotzdem zeigen wir hier übungshalber, daß der Hilfsweg

$$\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = R,\ \arg z \in [0,\,\pi]\}$$

harmlos ist.

Es gilt

$$\left|\frac{1}{z^6+1}\right| = \left|\frac{1}{R^6e^{6i\varphi}+1}\right| \le \frac{1}{\left|R^6e^{6i\varphi}\right|-1} = \frac{1}{R^6-1} \le \frac{2}{R^6}$$

für alle $z \in \Gamma,\ z = Re^{i\varphi},\ \varphi \in [0,\,\pi]$, falls $R > 1$. Deshalb ist

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^6+1}\,dz\right| \le \frac{2}{R^6}\cdot\pi R \quad\Rightarrow\quad \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{1}{z^6+1}\,dz \;=\; 0$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^6+1}\,dx + \int_{\Gamma_R}\frac{1}{z^6+1}\,dz\right) \;=\; \frac{2\pi}{3}. \tag{5.6}$$

Wegen der Symmetrie des Integranden hat man

$$2\int_0^{\infty}\frac{1}{x^6+1}\,dx \;=\; \frac{2\pi}{3} \quad\Rightarrow\quad \int_0^{\infty}\frac{1}{x^6+1}\,dx \;=\; \frac{\pi}{3}.$$

5.7 Konforme Abbildungen und harmonische Funktionen

Lösung 5.7.1 (a) $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C};$

Die Abbildung ist analytisch für $w:\ \mathbb{C}\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C}.$

(b) Konform: analytisch und $w'(z) \neq 0$;

$$w'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad ad-bc \neq 0.$$

Diese Bedingung kann man als Einschränkung im Bildbereich von $w(z)$ umsetzen: Schreibe $w(z)$ als

$$w(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{(cz+d)} \quad \Rightarrow$$

$$ad-bc \neq 0 \Leftrightarrow w(z) \neq \frac{a}{c} \quad \Rightarrow$$

$$w:\ \mathbb{C}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C}\backslash\left\{\frac{a}{c}\right\}.$$

(c) $w:\ \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$;

$$\left.\begin{array}{lcl} w\left(-\dfrac{d}{c}\right) & = & \infty \\ w(\infty) & = & \dfrac{a}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Es werden alle Werte in } \mathbb{C}_\infty \text{ angenommen} \Rightarrow$$

$$w \text{ ist surjektiv.}$$

Mit $ad-bc \neq 0$ ist w auch injektiv, da $w:\ \mathbb{C}\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C}\backslash\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ injektiv ist. Die Erweiterung $w\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty,\ w(\infty) = \dfrac{a}{c}$ ist auch injektiv.

D.h., für $ad-bc \neq 0$ ist $w:\ \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ bijektiv!

Lösung 5.7.2 $\Big\{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1\Big\} \to \left\{z \in \mathbb{C};\ \left|\dfrac{\pi}{2} - \arg z\right| < \dfrac{\pi}{8}\right\}$

Bilde zuerst $\Big\{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1\Big\}$ auf die Halbebene $\Big\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\Big\}$ ab. Dann $\Big\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\Big\}$ auf $\left\{z \in \mathbb{C};\ \left|\dfrac{\pi}{2} - \arg z\right| < \dfrac{\pi}{8}\right\}$, siehe Abb. 5.6.

Abbildung 5.6: Die gesuchte konforme Abbildung $w(z)$ in zwei Schritte zerlegt

$\underline{w_1:}$ Bilineare Abbildungen bilden Kreise auf Kreise ab. (Gerade sind Kreise mit unendlich großem Radius.)

Setze für w_1 eine bilineare Abbildung an. Wähle dazu drei Punkte am Rand von $\left\{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1\right\},\ z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -1$, und definiere eine Orientierung, vgl. Abb. 5.7; das gleiche in $\left\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\right\}$, $w_1 = -i$, $w_2 = 0$, $w_3 = i$.

Beachte: Durchläuft man die drei Punkte am Rand in der gewählten Orientierung, so befindet sich das zu transformierende Gebiet beide Male auf der *rechten* Seite der Kurve. Findet man nun eine bilineare Abbildung, die den Einheitskreis auf die Imaginäre Achse in der „richtigen" Orientierung abbildet, so hat man die Transformation w_1 bestimmt.

$$\left.\begin{array}{rcr} w_1(1) & = & -i \\ w_1(i) & = & 0 \\ w_1(-1) & = & i \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} a+b & = & -ic-id \\ ai+b & = & 0 \\ -a+b & = & -ic+id \end{array} \quad \Rightarrow\ b = -ia\ \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} a - ia = -ic - id \\ \underline{-a - ia = -ic + id} \\ -2ia = -2ic \Rightarrow \end{array} \qquad a = c,\ -a = id,\ d = ia \Rightarrow$$

Abbildung 5.7: Zur Definition der Funktion $w_1(z)$

$$w_1(z) = \frac{a(z-i)}{a(z+i)} = \frac{(z-i)}{(z+i)}.$$

$\underline{w_2}$: Wie man sich leicht überzeugen kann, bildet der Hauptzweig der 4–ten Wurzel die rechte Halbebene konform auf $\left\{z \in \mathbb{C};\ |\arg z\,| < \frac{\pi}{8}\right\}$ ab. Daher ist noch eine Drehung um $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn notwendig,

$$w_2(z) = z^{\frac{1}{4}} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

Da $z = 0$ *nicht* im Definitionsbereich liegt, ist die Abbildung tatsächlich konform!

Endgültig hat man

$$w(z) = \Big(w_2 \circ w_1\Big)(z) = \sqrt[4]{\frac{z-i}{z+i}}\, e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

Lösung 5.7.3 (a) Es gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^{-x}\sin y - xe^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -2e^{-x}\sin y + xe^{-x}\sin y - ye^{-x}\cos y, \qquad (5.7)\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= xe^{-x}\cos y + ye^{-x}\sin y - e^{-x}\cos y,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xe^{-x}\sin y + 2e^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y, \tag{5.8}$$

und die Addition von (5.7) und (5.8) liefert das Resultat. □

(b) Ist $f(z)$ analytisch, so gelten die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-x}\sin y - xe^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y, \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -xe^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y. \tag{5.10}$$

Integration in (5.9) bezüglich y liefert

$$\begin{aligned} v(x,y) &= -e^{-x}\cos y + xe^{-x}\cos y + e^{-x}(y\sin y + \cos y) + F(x) = \\ &= ye^{-x}\sin y + xe^{-x}\cos y + F(x), \end{aligned}$$

wobei $F(x)$ noch bestimmt werden muß.

Wir setzen $v(x,y)$ in (5.10) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -ye^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y - xe^{-x}\cos y + F'(x) = \\ &= -ye^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y - xe^{-x}\cos y \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$F'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = c,$$

wobei c eine Konstante ist. Damit haben wir schließlich

$$v(x, y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$ □

Lösung 5.7.4 (a) Es ist zu zeigen $|w(z)| < 1$, $\forall z$ mit $\operatorname{Im} z > 0$;

$$\begin{aligned} |w(z)| &= \left| e^{i\Theta_0}\left(\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}\right)\right| = \left|\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}\right|, \quad \operatorname{Im} z_0 > 0 \quad \Rightarrow \\ |w(z)| &< 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_0| < |z - \overline{z}_0|, \end{aligned}$$

siehe Abb. 5.8.

Abbildung 5.8: Für ein festes $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z_0 > 0$ und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z > 0$ gilt $|z - z_0| < |z - \overline{z}_0|$

Es sei $z = \alpha + i\beta,\ z_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ mit $\beta > 0\ \beta_0 > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|z - z_0| &< |z - \overline{z}_0| \Leftrightarrow \\
|z - z_0|^2 &< |z - \overline{z}_0|^2 \Leftrightarrow \\
(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 &< (\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta + \beta_0)^2 \Leftrightarrow \\
(\beta - \beta_0)^2 - (\beta + \beta_0)^2 &< 0 \Leftrightarrow \\
\beta_0 \cdot \beta &> 0\,,
\end{aligned}$$

was nach Voraussetzung gilt. □

Bemerkung: $|w(z)| = 1 \Leftrightarrow \beta_0 \cdot \beta = 0$, d.h., wenn $z = x \in \mathbb{R}$ ist. $w(z)$ bildet die reelle Achse $z = x \in \mathbb{R}$ auf den Einheitskreis $|w(z)| = 1$ ab.

(b) Nach (a) ist

$$w(z) = e^{i\Theta_0}\left(\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}\right); \quad \Theta_0 \in \mathbb{R}$$

und es soll gelten (z_0 fest in $\mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$)

$$\begin{cases}
w(i) = e^{i\Theta_0}\left(\dfrac{i - z_0}{i - \overline{z}_0}\right) = 0, \\
\lim\limits_{z\to\infty}\Big(w(z)\Big) = \lim\limits_{z\to\infty}\left(e^{i\Theta_0}\left(\dfrac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}\right)\right) = e^{i\Theta_0} = -1.
\end{cases}$$

Aus der ersten Forderung folgt $z_0 = i$ und damit

$$w(z) \;=\; (-1)\,\frac{z-i}{z+i} \;=\; \frac{i-z}{i+z}\,.$$

Lösung 5.7.5 (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y+2, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \forall\,(x,\,y) \in \mathbb{R}^2. \qquad \square$$

(b) Es sei $z = x+iy$ und $w = u+iv$, dann gilt

$$x+iy = (u+iv)^3 \;\Leftrightarrow\; x = u^3 - 3\,uv^2, \quad y = 3\,u^2v - v^3 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(w^3) \;&=\; f\Big((u^3-3\,uv^2),\,(3\,u^2v-v^3)\Big) = \\ &=\; (u^3-3\,uv^2)^2 - (3\,u^2v-v^3)^2 + 2(3\,u^2v-v^3) = \\ &=\; u^6 - 15\,u^4v^2 + 15\,u^2v^4 - v^6 + 6\,u^2v - 2\,v^3 := f(u,v). \end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 30\,u^4 - 180\,u^2v^2 + 30\,v^4 + 12\,v = -\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \qquad \forall\,(u,\,v) \in \mathbb{R}^2. \quad \square$$

Lösung 5.7.6 Die Funktion $\varphi(x,y)$ geht unter der Transformation

$$w = u+iv = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

in

$$\varphi\Big(x(u,v),\,y(u,v)\Big)$$

über. Damit gilt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \;=\; \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} \;=\; \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \;&=\; \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = \\ &=\; \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]=$$

$$\begin{aligned} =\ & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+ \\ & +\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} =\ & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+ \\ & +\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right].\end{aligned}$$

Addition ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} =\ & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+ \\ & +\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+ \\ & +\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Da $f=u+iv$ analytisch ist, sind die Funktionen u und v harmonisch, d.h.,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Auch die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen gelten,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Damit gilt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left|\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2=|\,f'(z)\,|^2\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\ =\ 0\,,$$

und
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = |\,f'(z)\,|^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right). \qquad (5.11)$$

$\square$

Bemerkung: Aus der Formel (5.11) folgt sofort: Ist die Funktin $\varphi(x,y)$ harmonisch, so bleibt sie unter der Transformation $w=u+iv=f(z)=f(x+iy)$ harmonisch, falls f eine konforme Abbildung (analytisch und $f'(z)\neq 0$) ist.

Lösung 5.7.7 Es sei $z-a:=re^{i\varphi},\ -\pi<\varphi\leq\pi$. Da $z\neq a$ ist, gilt $r>0$ und der Logarithmus,

$$\ln(z-a)=\ln\left(re^{i\varphi}\right)=\ln r+i\varphi=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi),$$

ist eine analytische Funktion in $\mathbb{C}\backslash\{a\}$. Dann sind aber der Realteil, $u(r,\varphi)$, und der Imaginärteil, $v(r,\varphi)$, harmonisch (was man auch durch Nachrechnen nachvollziehen kann).

Lösung 5.7.8 Anwendung der Formel (2.2):

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{yu_0(\eta)}{y^2+(x-\eta)^2}\,d\eta=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-\eta)^2}\,d\eta= \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\eta-x}{y}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)= \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

Die Funktion $u(x,y)$ erfüllt die Randbedingungen, wenn man unter $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ den Hauptzweig, $-\frac{\pi}{2}<\arctan\left(\frac{x}{y}\right)<\frac{\pi}{2}$, versteht:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{y\to 0\\ x>0}}u(x,y) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(+\infty)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1, \\ \lim_{\substack{y\to 0\\ x<0}}u(x,y) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(-\infty)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0. \end{aligned}$$

Man kann $u(x,y)$ auch anders darstellen:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right)\right),\quad 0\leq\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right)\leq\pi,$$

und schließlich

$$u(x,y) = 1 - \frac{1}{\pi}\,\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right) = 1 - \frac{1}{\pi}\,\arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

wobei für $-\infty < x \leq 0$, $\frac{\pi}{2} \leq \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \leq \pi$, für $0 \leq x < \infty$, $0 \leq \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{\pi}{2}$, siehe Abb. 5.9, ist.

Abbildung 5.9: Wahl der richtigen Zweige der arctan–Funktion

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{y\to 0\\ x>0}} u(x,y) &= 1 - \frac{1}{\pi}\,\underbrace{\arctan(0_+)}_{=0} = 1\,,\\
\lim_{\substack{y\to 0\\ x<0}} u(x,y) &= 1 - \frac{1}{\pi}\,\underbrace{\arctan(0_-)}_{=\pi} = 0\,.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Aus Beispiel 5.7.7 folgt, daß für $y > 0$ die Funktion

$$\ln z = \ln r + i\varphi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi\,,$$

analytisch und damit ihr Imaginärteil, die Funktion φ, harmonisch ist. Dann ist aber auch $u(r,\varphi) := a\varphi + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, harmonisch. Die Randbedingungen liefern

$$u(0,0) = b = 1, \quad u(0,\pi) = a\pi + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = -\frac{1}{\pi}$$

und daraus

$$\begin{cases} u(r,\varphi) &=& -\dfrac{1}{\pi}\,\varphi+1\,; & r>0, \quad 0<\varphi<\pi, \\ u(x,y) &=& 1-\dfrac{1}{\pi}\,\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)\,; & y>0, \quad -\infty<x<\infty, \end{cases}$$

wobei auch hier für $-\infty < x \leq 0$, $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ und für $0 \leq x < \infty$, $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in \left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]$ gilt, vgl. Abb. 5.9.

Lösung 5.7.9 Die Formel (2.2) liefert die Lösungsdarstellung

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y u_0(\eta)\,d\eta}{y^2+(x-\eta)^2} = \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{y\tau_0\,d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{y\tau_1\,d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{y\tau_2\,d\eta}{y^2+(x-\eta)^2} = \\ &= \frac{\tau_0}{\pi}\,\arctan\left(\frac{\eta-x}{y}\right)\Bigg|_{-\infty}^{-1}+\frac{\tau_1}{\pi}\,\arctan\left(\frac{\eta-x}{y}\right)\Bigg|_{-1}^{1}+ \\ &\qquad +\frac{\tau_2}{\pi}\,\arctan\left(\frac{\eta-x}{y}\right)\Bigg|_{1}^{\infty} = \\ &= \frac{\tau_0}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{-1-x}{y}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]+ \\ &\qquad +\frac{\tau_1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{1-x}{y}\right)-\arctan\left(\frac{-1-x}{y}\right)\right]+ \\ &\qquad +\frac{\tau_2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1-x}{y}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\Big(\tau_0+\tau_2\Big)+\frac{1}{\pi}\Big(\tau_1-\tau_2\Big)\,\arctan\left(\frac{1-x}{y}\right)+ \\ &\qquad +\frac{1}{\pi}\Big(\tau_1-\tau_0\Big)\,\arctan\left(\frac{1-x}{y}\right), \qquad y>0, \quad -\infty<x<\infty, \end{aligned}$$

wobei unter arctan der Hauptzweig mit $\arctan(v) \in \left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]$ zu wählen ist. Dabei sind auch die Randbedingungen erfüllt, wie man leicht nachrechnen kann.

Lösung 5.7.10 Die Abbildung $w(z) = \frac{i-z}{i+z}$ bildet die obere Halbebene auf das Innere der Einheitskreises ab. Wir drücken z als Funktion von w aus, um die Umkehrabbildung zu finden:

$$z = \frac{i(1-w)}{1+w}\,, \qquad |w| < 1.$$

Diese Abbildung ist analytisch und wegen $\frac{dz}{dw} = \frac{-2i}{(1+w)^2} \neq 0$, auch konform, siehe Abb. 5.10.

Abbildung 5.10: Transformation $z(w) = \frac{i(1-w)}{1+w}$ des Einheitskreises auf die obere Halbebene

Man rechnet auch leicht nach, daß die Kurve ACE in die Kurve $A'C'E'$, in dieser Orientierung, übergeht und damit lautet die Randbedingung für die z–Ebene $\Big(z(A) = A', \ldots, z(E) = E'\Big)$:

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 < \ x \ < \infty, \\ 0, & -\infty < \ x \ < 0. \end{cases}$$

Damit ist die Lösung $u(x,y)$ identisch mit jener, die im Beispiel 5.7.8 ermittelt wurde:

$$u(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Es bleibt noch, diese Lösung als Funktion von (u,v) auszudrücken:

$$z = x + iy,\ w = u + iv,$$

$$\begin{aligned}
z = x + iy &= \frac{i(1-(u+iv))}{(1+(u+iv))} = \frac{2v + i(1-u^2-v^2)}{(1+u)^2+v^2} \;\Leftrightarrow \\
x &= \frac{2v}{(1+u)^2+v^2} = \frac{2r\sin\varphi}{(1+r\cos\varphi)^2+r^2\sin^2\varphi}\,, \\
y &= \frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2} = \frac{1-r^2}{(1+r\cos\varphi)^2+r^2\sin^2\varphi}\,, \\
\frac{x}{y} &= \frac{2r\sin\varphi}{1-r^2} \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\underbrace{\arctan\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right)}_{\substack{\text{Hauptzweig mit Werten}\\ \text{in } [-\pi/2,\pi/2]}}; \quad 0 < r < 1, \quad \varphi \in (0, 2\pi),$$

bzw.

$$u(r,\varphi) = 1 - \frac{1}{\pi}\,\arctan\left(\frac{1-r^2}{2r\sin\varphi}\right), \quad 0 < r < 1, \quad \varphi \in (0, 2\pi),$$

mit der entsprechenden Wahl der Zweige von $\arctan(\cdot)$, vgl. Abb. 5.9.

Lösung 5.7.11 (a) Beispiel 5.7.10.

(b) $0 < \varphi < \pi \Rightarrow \sin\varphi > 0 \;\Leftrightarrow$

$$\lim_{r\to 1_-} u(r,\varphi) = \frac{2}{\pi}\,\arctan(+\infty) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1,$$

$\pi < \varphi < 2\pi \Rightarrow \sin\varphi < 0 \;\Leftrightarrow$

$$\lim_{r\to 1_-} u(r,\varphi) = \frac{2}{\pi}\,\arctan(-\infty) = \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

dabei handelt es sich um den Hauptzweig von $\arctan(\cdot) \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(c) 1. Versuch:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\,u(1,\eta)\,d\eta}{1-2r\cos(\eta-\varphi)+r^2} = \tag{5.12}$$

$$= \frac{1-r^2}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \frac{(1)\,d\eta}{1-2r\cos(\eta-\varphi)+r^2} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{(-1)\,d\eta}{1-2r\cos(\eta-\varphi)+r^2}\right].$$

Wir berechnen das 1. Integral:

Es sei $\alpha := \eta - \varphi \;\Rightarrow\; d\alpha = d\eta$,

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{d\eta}{1 - 2r\cos(\eta - \varphi) + r^2} = \int\limits_{-\varphi}^{\pi-\varphi} \frac{d\alpha}{1 + r^2 - 2r\cos\alpha}.$$

Mit der im Hinweis angegebenen Formel, mit $a = 1+r^2$ und $b = -2r$, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\varphi}^{\pi-\varphi} \frac{d\alpha}{1 + r^2 - 2r\cos\alpha} &= \frac{2}{1-r^2}\left[\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\,\tan\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right)\right) - \right.\\
&\qquad \left. - \arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\,\tan\left(-\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right] = \\
&= \frac{2}{1-r^2}\left[\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\,\underbrace{\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right)}_{\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}}\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\,\underbrace{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}_{\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}}\right)\right] = \\
&= \frac{2}{1-r^2}\left[\arctan\left(\frac{\frac{2c}{\sin\varphi}}{1-c^2}\right)\right]\Bigg|_{c=\frac{1+r}{1-r}} = \\
&= \frac{2}{1-r^2}\,\arctan\left(\frac{1-r^2}{-2r\sin\varphi}\right). \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

Analog gilt für das 2. Integral:

$$\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{d\eta}{1 - 2r\cos(\eta - \varphi) + r^2} = \frac{2}{1-r^2}\,\arctan\left(\frac{1-r^2}{2r\sin\varphi}\right). \qquad (5.14)$$

Setzt man diese Ausdrücke in (5.12) ein, so ergibt sich für

$$\begin{aligned}
u(r,\varphi) &= \frac{1-r^2}{2\pi}\left[(1)\cdot\frac{2}{1-r^2}\,\arctan\left(\frac{1-r^2}{-2r\sin\varphi}\right) + \right.\\
&\qquad \left. + (-1)\cdot\frac{2}{1-r^2}\,\arctan\left(\frac{1-r^2}{2r\sin\varphi}\right)\right] = \qquad (5.15)\\
&\overset{!!}{=} -\frac{2}{\pi}\,\arctan\left(\frac{1-r^2}{2r\sin\varphi}\right) = -1 + \frac{2}{\pi}\,\arctan\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right),
\end{aligned}$$

zwar eine harmonische Funktion, aber die *Randbedingungen sind nicht erfüllt*:

$$\lim_{\substack{r\to 1_- \\ 0<\varphi<\pi}} u(r,\varphi) = -1 + \frac{2}{\pi}\,\arctan(+\infty) = 0,$$

$$\lim_{\substack{r\to 1_- \\ \pi<\varphi<2\pi}} u(r,\varphi) = -1 + \frac{2}{\pi}\,\arctan(-\infty) = -1-1 = -2.$$

Es liegt nahe zu vermuten, daß der Fehler durch das „Zusammenfassen“ von *falschen* Zweigen der arctan–Funktion in (5.15) passiert.

Überlegen wir:

Eine harmonische Funktion $u(r,\varphi)$, die die Randbedingungen

$$u(1,\varphi) = \begin{cases} u_0, & 0<\varphi<\pi, \\ u_1, & \pi<\varphi<2\pi, \end{cases}$$

erfüllt, kann man (wegen der Linearität des Laplace–Operators) aus zwei Anteilen zusammenbauen ($u_0(r,\varphi)$ und $u_1(r,\varphi)$ harmonisch):

$$u(r,\varphi) = u_0(r,\varphi) + u_1(r,\varphi)$$

mit

$$u_0(1,\varphi) = \begin{cases} u_0, & 0<\varphi<\pi, \\ 0, & \pi<\varphi<2\pi, \end{cases}$$

$$u_1(1,\varphi) = \begin{cases} 0, & 0<\varphi<\pi, \\ u_1, & \pi<\varphi<2\pi. \end{cases}$$

Wegen (5.12), (5.13) und (5.14) gilt

$$u_0(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\,u_0 \int\limits_0^{\pi} \frac{(1-r^2)\,d\eta}{1-2r\cos(\eta-\varphi)+r^2} = -\frac{u_0}{\pi}\,\arctan\left(\frac{1-r^2}{2r\sin\varphi}\right) =$$

$$= -\frac{u_0}{\pi}\,\operatorname{arccot}\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2},$$

$$u_1(r,\varphi) = \frac{u_1}{\pi}\,\arctan\left(\frac{1-r^2}{2r\sin\varphi}\right) = \frac{u_1}{\pi}\,\operatorname{arccot}\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right).$$

Folglich,

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= u_0(r,\varphi) + u_1(r,\varphi) \Leftrightarrow \\ u(r,\varphi) &= -\frac{u_0}{\pi} \operatorname{arccot}\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right) + \frac{u_1}{\pi} \operatorname{arccot}\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right). \end{aligned}$$

Damit $u_0(r,\varphi)$ die Randbedingungen erfüllt, wählen wir für $\operatorname{arccot} v$ jenen Zweig mit $\operatorname{arccot} v := \operatorname{arccot}_0 v \in (0,-\pi)$, bei $u_1(r,\varphi)$ ist dies $\operatorname{arccot} v := \operatorname{arccot}_1 v \in (0,\pi)$, d.h.,

$$u(r,\varphi) = -\frac{u_0}{\pi} \operatorname{arccot}_0\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right) + \frac{u_1}{\pi} \operatorname{arccot}_1\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right),$$

vgl. Abb. 5.11.

Abbildung 5.11: Zur Konstruktion von $u(r,\varphi)$

Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot}_0\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right) &= -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right), \\ \operatorname{arccot}_1\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right) &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right), \end{aligned}$$

wobei in beiden Fällen $\arctan v \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist. Folglich hat man

$$u(r,\varphi) = -\frac{u_0}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right)\right) +$$

$$+\frac{u_1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right)\right)=$$

$$=\quad\frac{u_1+u_0}{2}+\frac{u_0-u_1}{\pi}\arctan\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right).$$

Setzt man in diese Darstellung die Spezialwerte $u_0=1$ und $u_1=-1$ ein, so ergibt sich diesmal die korrekte Lösung, die die Randbedingungen erfüllt;

$$u(r,\varphi)=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right).$$

Kapitel 6

Integraltransformationen

6.1 Laplace–Transformation

Lösung 6.1.1 Laplace–Transformation:

$$\varphi(s) = \mathcal{L}\,[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx}\,f(x)\,dx.$$

1. $\mathcal{L}\,[e^{\omega x}f(x)] = \int_0^\infty e^{-(s-\omega)x}\,f(x)\,dx = \varphi(s-\omega).$

2. Aufgrund der Differentialgleichung

$$f'(x) = f^2(x) + e^{-x}$$

ergibt sich (Linearität von $\mathcal{L}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^2(x)] &= \mathcal{L}\,[f'(x)] - \mathcal{L}[e^{-x}] = \\ &= s\,\mathcal{L}\,[f(x)] - f(0) - \frac{1}{s+1} = s\,\varphi(s) - \frac{s+2}{s+1}. \end{aligned}$$

Lösung 6.1.2 1. $\mathcal{L}[x^2](s) = \dfrac{2!}{s^3} = \dfrac{2}{s^3} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}[e^{3x}x^2](s) = \dfrac{2}{(s-3)^3},$

2. $\mathcal{L}[\sin 4x](s) = \dfrac{4}{s^2+16} \;\Rightarrow$

$$\mathcal{L}[e^{-2x}\sin 4x](s) = \frac{4}{(s+2)^2+16} = \frac{4}{s^2+4s+20},$$

3. $\mathcal{L}[\cosh 5x](s) = \dfrac{s}{s^2-25} \;\Rightarrow$

$$\mathcal{L}[e^{4x}\cosh 5x](s) = \frac{s-4}{(s-4)^2-25} = \frac{s-4}{s^2-8s-9},$$

4. $\mathcal{L}[3\cos 6x - 5\sin 6x](s) = 3\mathcal{L}[\cos 6x](s) - 5\mathcal{L}[\sin 6x](s) =$

$$= \frac{3s}{s^2+36} - \frac{30}{s^2+36} = \frac{3s-30}{s^2+36} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[e^{2x}(3\cos 6x - 5\sin 6x)](s) = \frac{3(s+2)-30}{(s+2)^2+36} = \frac{3s-24}{s^2+4s+40}\,.$$

Lösung 6.1.3 1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-3}\right](x) = \dfrac{\sinh\sqrt{3}\,x}{\sqrt{3}},$

2. $\mathcal{L}[x^\alpha](s) = \displaystyle\int_0^\infty x^\alpha e^{-sx}\,dx;$

Wir führen die Transformation $u := sx$, $du = sdx$ durch und erhalten

$$\mathcal{L}[x^\alpha](s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha e^{-u}\,du = \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty u^\alpha e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

mit $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^\infty t^{a-1}e^{-x}\,dx$ (Gamma–Funktion). Diese Funktion ist die Verallgemeinerung von $n!$, wegen der Eigenschaften

$$\begin{aligned} \Gamma(a+1) &= a\,\Gamma(a),\\ \Gamma(n+1) &= n!,\\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Daher gilt $\mathcal{L}[x^{1/2}](s) = \dfrac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}{s^{3/2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^{3/2}} \Rightarrow$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{3/2}}\right](x) = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}},$$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{12s^3}{s^4-256}\right](x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{6s}{s^2-16}\cdot\dfrac{6s}{s^2+16}\right](x) =$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6s}{s^2-16}\right](x) * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6s}{s^2+16}\right](x);$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6s}{s^2-16}\right](x) &= 6\cosh 4x,\\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6s}{s^2+16}\right](x) &= 6\cos 4x,\\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12s^3}{s^4-256}\right](x) &= 6\cosh 4x * 6\cos 4x = \int\limits_0^x 36\cosh 4\xi\cos 4(x-\xi)d\xi =\\
&= \frac{9}{2}\Big(\sinh 4x - \sin 4x\Big).
\end{aligned}$$

Lösung 6.1.4 1. Die Funktion $\varphi(s)$ hat die Gestalt

$$\varphi(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3} =: \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Dabei sind $P(s)$ und $Q(s)$ zwei Polynome in s mit $\mathrm{Grad}P(s) < \mathrm{Grad}Q(s)$. Die Nullstellen von $Q(s)$ sind $s_1 = -1,\ s_2 = 3 \in \mathbb{R}$. Partialbruchzerlegung von $\varphi(s)$ liefert

$$\varphi(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{4}{s-3} - \frac{1}{s+1} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[\varphi(s)](x) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s-3} - \frac{1}{s+1}\right](x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Linearität von } \mathcal{L}^{-1}}}{=}\\
&= 4\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right](x) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](x) =\\
&= 4e^{3x} - e^{-x}, \quad \mathrm{Re}\, s > 3.
\end{aligned}$$

Wir benützten die Formel $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-\lambda}\right](x) = e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\,\lambda.$

2. $\varphi(s) = \dfrac{6s-4}{s^2-4s+20} =: \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ mit $\mathrm{Grad}P(s) < \mathrm{Grad}Q(s)$. $Q(s)$ hat zwei komplexe Nullstellen $s_1 = 2-4i,\ s_2 = 2+4i \ \Rightarrow$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right](x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+16}\right](x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Linearität von } \mathcal{L}^{-1}}}{=}$$

$$
\begin{aligned}
&= 6\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\right](x)+2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-2)^2+16}\right](x)= \\
&= 6e^{2x}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+16}\right](x)+2e^{2x}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+16}\right](x)= \\
&= 6\,e^{2x}\cos 4x+2e^{2x}\sin 4x=2e^{2x}(3\cos 4x+\sin 4x),\ \operatorname{Re} s>2.
\end{aligned}
$$

Wir benützten die Formel $\mathcal{L}\,[f(x)]\,(s) := \varphi(s)$,

$$\mathcal{L}^{-1}\,[\varphi(s-a)]\,(x) = e^{ax}\,\mathcal{L}^{-1}\,[\varphi(s)]\,(x), \quad \operatorname{Re} s > a+\alpha,$$

mit α gegeben durch $|f(x)| \le Me^{\alpha x}, \quad \forall\, x>0.$

Lösung 6.1.5 Für $\varphi(s) = -\frac{1}{2}\Big(s^2+2s+2\Big)^{-1}$ gilt

$$\frac{d}{ds}\,\varphi(s) = (s+1)\Big(s^2+2s+2\Big)^{-2}.$$

Es sei $\frac{d}{ds}\,\varphi(s)$ die Laplace–Transformierte von $f(x)$ und sei $\varphi(s)$ die Laplace–Transformierte von $g(x)$. Dann gilt

$$\mathcal{L}\,[f(x)]\,(s) = \frac{d}{ds}\,\varphi(s) = \frac{d}{ds}\,\left(\mathcal{L}\,[g(x)]\,(s)\right) = -\mathcal{L}\,[xg(x)]\,(s) \Leftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(s) &= \mathcal{L}\,[g(x)]\,(s) \Leftrightarrow \\
g(x) &= \mathcal{L}^{-1}\,[\varphi(s)]\,(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/2}{s^2+2s+2}\right](x) = \\
&= -\frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right](x) = -\frac{1}{2}\,e^{-x}\sin x, \quad \operatorname{Re} s > -1 \Rightarrow \\
f(x) &= -x\,g(x) = \frac{1}{2}x\,e^{-x}\sin x\,.
\end{aligned}
$$

Lösung 6.1.6 Es sei $\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)$ der Hauptzweig der Logarithmusfunktion. Wir versuchen ein $\varphi(s)$ so zu finden, daß

$$\int_s^\infty \varphi(\sigma)\,d\sigma = -\int_\infty^s \varphi(\sigma)\,d\sigma = \ln(s+2)-\ln(s+1)$$

gilt. Beiderseitige Differentiation liefert *formal*:

$$-\varphi(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} \Leftrightarrow \varphi(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\,.$$

Rechtfertigung:

Die Funktion $\varphi(s)$ ist analytisch auf einem einfach zusammenhängendem Gebiet $\operatorname{Re} s > -1$. Dann gibt es eine Stammfunktion $F(\sigma)$ mit $F'(\sigma) = f(\sigma)$ mit

$$\int_s^\infty \varphi(\sigma)\,d\sigma = \lim_{\sigma\to\infty} F(\sigma) - F(s).$$

Es sei

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= -\ln\left(\frac{\sigma+2}{\sigma+1}\right) = \ln(\sigma+1) - \ln(\sigma+2), \\ F'(\sigma) &= \frac{1}{\sigma+1} - \frac{1}{\sigma+2} \qquad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int_s^\infty \varphi(\sigma)\,d\sigma = \lim_{\sigma\to\infty}\left(-\ln\left(\frac{\sigma+2}{\sigma+1}\right)\right) + \ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right) = \ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right), \quad \operatorname{Re} s > -1.$$

Es sei $\varphi(s) := \mathcal{L}[g(x)](s)$ und $\int_s^\infty \varphi(\sigma)\,d\sigma := \mathcal{L}[f(x)](s)$, dann gilt

$$\mathcal{L}[f(x)](s) = \int_s^\infty \varphi(\sigma)\,d\sigma = \int_s^\infty \mathcal{L}[g(x)](\sigma)\,d\sigma = \mathcal{L}\left[\frac{g(x)}{x}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{x}\,\mathcal{L}^{-1}[\varphi(s)](x) = \\ &= \frac{1}{x}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right](x) = \frac{1}{x}\left(e^{-x} - e^{-2x}\right)\,. \end{aligned}$$

Lösung 6.1.7 Gesucht ist die Lösung $u(x)$ von

$$u''(x) - 3u'(x) + 2u(x) = 4e^{2x},\ u(0) = -3,\ u'(0) = 5.$$

(i) Differentialgleichung transformieren (Linearität von $\mathcal{L}$):

$$\mathcal{L}[u''] - 3\mathcal{L}[u'] + 2\mathcal{L}[u] = 4\mathcal{L}[e^{2x}];$$

gemäß der Rechenregeln für $\mathcal{L}$ ergibt sich so für die Laplace–Transformierte $\eta = \eta(s) := \mathcal{L}[u(x)](s)$:

$$\Big[s^2\eta - su(0) - u'(0)\Big] - 3\Big[s\eta - u(0)\Big] + 2\eta = \frac{4}{2-s}.$$

(ii) Dies ist eine lineare algebraische Gleichung für $\eta = \eta(s)$; Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingungen für $u(0)$ und $u'(0)$ und Umformung ergibt:

$$\eta(s^2 - 3s + 2) + 3s - 14 = \frac{4}{s-2} \Rightarrow$$

$$\eta = \frac{4}{(s^2 - 3s + 2)\,(s-2)} + \frac{14 - 3s}{s^2 - 3s + 2}\,.$$

(iii) Um rücktransformieren zu können, benötigen wir die Partialbruchzerlegung dieses Ausdrucks. Mit $s^2 - 3s + 2 = (s-1)\,(s-2)$ erhalten wir

$$\eta = -\frac{7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

und daher als Lösung

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}[\eta(s)] = -7e^{-x} + 4e^{2x} + 4xe^{2x}\,.$$

Lösung 6.1.8 $y_1' = -17y_1 + 20y_2 + 3,\ y_1(0) = 40,$

$$y_2' = \quad 3y_1 - \ 6y_2, \qquad y_2(0) = 20.$$

Lösung mittels Laplace–Transformation:

(i) Differentialgleichung transformieren (Linearität von $\mathcal{L}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y_1'] &= -17\mathcal{L}[y_1] + 20\mathcal{L}[y_2] + \mathcal{L}[3], \\ \mathcal{L}[y_2'] &= \quad 3\mathcal{L}[y_1] - \ 6\mathcal{L}[y_2], \end{aligned}$$

also mit $\varphi_i(s) := \mathcal{L}[y_i]$:

$$\begin{aligned} s\varphi_1(s) - 40 &= -17\varphi_1(s) + 20\varphi_2(s) + \frac{3}{s}, \\ s\varphi_2(s) - 20 &= \quad 3\varphi_1(s) - \ 6\varphi_2(s), \end{aligned}$$

erhält man ein lineares Gleichungssystem für $\varphi_1(s),\ \varphi_2(s)$.

(ii) Lösen des linearen Gleichungssystems ergibt

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) &= \frac{(3+40s)(s+6)+400s}{s(s^2+23s+42)},\\ \varphi_2(s) &= \frac{20s(s+17)+3(3+40s)}{s(s^2+23s+42)}.\end{aligned}$$

(iii) Partialbruchzerlegung: Zunächst benötigt man die Faktorisierung des Nenners:

$$s(s^2+23s+42) = s(s+2)(s+21)$$

Bemerkung: $s=2,\ s=21$ sind genau die *Eigenwerte* der Koeffizientenmatrix des gegebenen Systems von Differentialgleichungen – um deren Berechnung kommt man natürlich nicht herum.

Durchführung der Partialbruchzerlegung ergibt

$$\varphi_1(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{b_1}{s+2} + \frac{c_1}{s+21}$$

mit

$$a_1 = \frac{3}{7},\ b_1 = \frac{554}{19},\ c_1 = \frac{1385}{133};$$

$$\varphi_2(s) = \frac{a_2}{s} + \frac{b_2}{s+2} + \frac{c_2}{s+21}$$

mit

$$a_2 = \frac{3}{14},\ b_2 = \frac{831}{38},\ c_2 = -\frac{277}{133}.$$

(iv) Rücktransformation:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \mathcal{L}^{-1}[\varphi_1(s)] = a_1 + b_1 e^{-2x} + c_1 e^{-21x},\\ y_2(x) &= \mathcal{L}^{-1}[\varphi_2(s)] = a_2 + b_2 e^{-2x} + c_2 e^{-21x},\end{aligned}$$

mit obigen $a_i,\ b_i,\ c_i$.

Lösung 6.1.9 $2\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - u,\ u(x,0) = 6e^{-3x},\ u = u(x,t) = ?$

Lösung mittels Laplace–Transformation bezüglich t:

Für festes x bezeichne

$$\eta(x,s) := \mathcal{L}[u(x,t)](s)$$

die Laplace–Transformierte von $u(x,t)$ bezüglich t. Es gilt dann nach den Rechenregeln für die Laplace–Transformation:

(a) $\mathcal{L}\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}\right](s) = s\eta(x,s) - u(x,0),$

(b) $\mathcal{L}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\right](s) = \dfrac{\partial \eta(x,s)}{\partial x}.$

Bemerkung: (a) ist klar, (b) erhält man leicht durch (erlaubtes!) Vertauschen von Differentiation nach dem Parameter x und Integration bezüglich t in

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}\,dt.$$

Damit transformiert sich die gegebene partielle Differentialgleichung in (Linearität von $\mathcal{L}$):

$$2\,[s\,\eta(x,s) - u(x,0)] = \frac{\partial}{\partial x}\eta(x,s) - \eta(x,s),$$

wobei laut gegebenen Anfangsbedingungen $u(x,0) = 6\,e^{-3x}$ ist. D.h., wir haben eine gewöhnliche Differentialgleichung (bezüglich x) für die Funktion $\eta = \eta(x,s)$ erhalten, die von dem Parameter s abhängt. Diese lineare gewöhnliche Differentialgleichung für η kann man entweder mittes Laplace–Transformation (bezüglich x) oder mit der Methode der Variation der Konstanten lösen und erhält als allgemeine Lösung

$$\eta(x,s) = \frac{6}{s+2}\,e^{-3x} + C\,e^{(2s+1)x}$$

mit einer beliebigen Konstanten C. Da gefordert war, daß $u(x,t)$ für t, $x \to \infty$ beschränkt bleiben soll, ist $C = 0$ zu wählen.

Rücktransformation, $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}[\eta(x,s)]$, bezüglich t für jedes feste x liefert als Lösung

$$u(x,t) = 6\,e^{-2t-3x}.$$

6.2 Fourier–Transformation

Lösung 6.2.1 Fourier–Integral einer auf $(-\infty,\infty)$ absolut integrierbaren Funktion:

$$f(x) = \int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega + \int_0^\infty b(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega$$

mit

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(\omega t)\,dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(\omega t)\,dt.$$

Die Funktion $f(x) = e^{-a|x|}$ $(a > 0)$ ist absolut integrierbar auf $(-\infty, \infty)$; wegen $f(x) = f(-x)$ ist $b(\omega) \equiv 0$ (leicht zu sehen).

Für $a(\omega)$ erhält man mittels zweifacher partieller Integration

$$
\begin{aligned}
a(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\cos(\omega t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \underbrace{e^{-at}}_{u}\,\underbrace{\cos(\omega t)}_{v'}\,dt = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{e^{-at}\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}}_{=0} + \frac{a}{\omega}\int_0^{\infty}\underbrace{e^{-at}}_{u}\,\underbrace{\sin(\omega t)}_{v'}\,dt\right] = \\
&= \frac{2}{\pi}\,\frac{a}{\omega}\left[-e^{-at}\,\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} - \frac{a}{\omega}\int_0^{\infty} e^{-at}\cos(\omega t)\,dt\right] = \\
&= \frac{2a}{\pi\omega^2} - \frac{a^2}{\omega^2}\,\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-at}\cos(\omega t)\,dt}_{=a(\omega)} \Rightarrow \\
a(\omega) &= \frac{2}{\pi}\,\frac{a/\omega^2}{1 + a^2/\omega^2} = \frac{2}{\pi}\,\frac{a}{a^2+\omega^2}\,.
\end{aligned}
$$

Daher:

$$
f(x) = e^{-a|x|} = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{a^2+\omega^2}\,d\omega, \quad x \in \mathbb{R}.
$$

Lösung 6.2.2 Die Funktion $f(x)$ ist absolut integrierbar auf $(-\infty, \infty)$. Daher

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} e^{i\omega x}\,dx = \\
&= \frac{1}{i\omega}\,e^{i\omega x}\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{1}{\omega}\cdot\underbrace{\frac{1}{i}\left(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}\right)\cdot\frac{1}{2}}_{=\sin(\omega a)}\cdot 2 = \\
&= \frac{2}{\omega}\,\sin(\omega a); \quad \omega \neq 0.
\end{aligned}
$$

Lösung 6.2.3 Ist $\varphi(\omega)$ die Fourier–Transformierte von $f(x)$,

$$
\varphi(\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx, \quad \omega \in \mathbb{R},
$$

so ist

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \varphi(\omega)\, d\omega,$$

vgl. Skriptum. Es sei $\varphi(\omega) := \frac{2}{\omega} \sin(\omega a),\ \omega \neq 0$, dann gilt,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ \frac{1}{2}, & |x| = a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Weiters

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \varphi(\omega)\, d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \cdot \frac{2}{\omega} \sin(\omega a)\, d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \Bigg[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) \frac{\sin(\omega a)}{\omega}\, d\omega - \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega x) \frac{\sin(\omega a)}{\omega}\, d\omega}_{=0} \Bigg] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)\cos(\omega x)}{\omega}\, d\omega = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ \frac{1}{2}, & |x| = a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit hat man

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)\cos(\omega x)}{\omega}\, d\omega = \begin{cases} \pi, & |x| < a, \\ \frac{\pi}{2}, & |x| = a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Bemerkung: Für $x = 0$ und $a = 1$ ergibt sich das bekannte Ergebnis

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega}\, d\omega = \pi.$$

Lösung 6.2.4 (a) $\varphi_c(\omega) := \mathcal{F}_c[f(x)](\omega) = 2 \int\limits_{0}^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx =$

$$= 2 \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\beta x} \cos(\omega x)\, dx = 2 \frac{e^{-\beta x}\Big(-\beta \cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)\Big)}{\beta^2 + \omega^2} \Bigg|_0^{\infty} =$$

$$= -2\left(\frac{-\beta}{\beta^2+\omega^2}\right) = \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}, \quad \beta > 0.$$

(b) Es gilt, vgl. Skriptum,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi_c(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega \;\Leftrightarrow \\
e^{-\beta x} &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos(\omega x)\,d\omega \;\Leftrightarrow \\
\int\limits_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{\beta^2+\omega^2}\,d\omega &= \frac{\pi}{2\beta}\,e^{-\beta x}.
\end{aligned}$$

Setze $x := \beta,\ \beta := \alpha,\ \omega := v$, dann ergibt sich

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos(\beta v)}{v^2+\alpha^2}\,dv = \frac{\pi}{2\alpha}\,e^{-\alpha\beta}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

□

Lösung 6.2.5 Es sei

$$\varphi_s(\omega) := \mathcal{F}_s[f(x)](\omega) = 2\int\limits_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\,dx = \begin{cases} 2(1-\omega), & 0 \le \omega \le 1, \\ 0, & \omega > 1, \end{cases}$$

dann ist, vgl. Skriptum,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi_s(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 2(1-\omega)\sin(\omega x)\,d\omega = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{x} - \frac{1}{x^2}\,\sin x\right] = \frac{2}{\pi x^2}\Big(x - \sin x\Big).
\end{aligned}$$

Lösung 6.2.6 Wir nehmen an, daß die Fourier–Transformierte von $y(x)$ existiert und nennen sie $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(x)]$. Transformieren wir die Gleichung (3.1) und wenden den Satz von Borel an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[y(x)] &= \mathcal{F}[g(x)] + \mathcal{F}[y * r] \quad &\Rightarrow \\
Y(\omega) &= G(\omega) + Y(\omega)\,R(\omega) \quad &\Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[y(x)] = Y(\omega) = \frac{G(\omega)}{1 - R(\omega)}\,,$$

und weiters

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{1 - R(\omega)}\, e^{-i\omega x}\, d\omega.$$

Lösung 6.2.7 Wir transformieren die Gleichung wie folgt:
Es sei $r(x) := \frac{1}{x^2+a^2}$ und $g(x) := \frac{1}{x^2+b^2}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y * r] &= \mathcal{F}[g(x)] \Leftrightarrow \\ \mathcal{F}[y(x)] \cdot \mathcal{F}[r(x)] &= \mathcal{F}[g(x)] \Leftrightarrow \\ \mathcal{F}[y(x)] &= \frac{\mathcal{F}[g(x)]}{\mathcal{F}[r(x)]}\,. \end{aligned}$$

Mit

$$\mathcal{F}[r(x)](\omega) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2}\, dx = 2 \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{2\pi}{2a}\, e^{-a\omega} = \frac{\pi}{a}\, e^{-a\omega}\,, \quad a > 0,$$

vgl. Beispiel 6.2.4(b), ergibt sich

$$\varphi(\omega) := \mathcal{F}[y(x)] = \frac{\frac{\pi}{b} e^{-b\omega}}{\frac{\pi}{a} e^{-a\omega}} = \frac{a}{b}\, e^{-(b-a)\omega},$$

oder äquivalenterweise

$$\mathcal{F}[y(x)] = \frac{a\,(b-a)}{\pi b} \cdot \frac{\pi}{b-a}\, e^{-(b-a)\omega}.$$

Mit

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 + c^2}\right] = \frac{\pi}{c} e^{-c\omega}, \quad c > 0,$$

folgt dann sofort für $c := (b - a) > 0$,

$$y(x) \;=\; \frac{a(b-a)}{\pi b}\, \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\pi}{b-a} e^{-(b-a)\omega}\right] = \frac{a(b-a)}{\pi b} \cdot \frac{1}{x^2 + (b-a)^2}, \quad b - a > 0.$$

Lösung 6.2.8 Es sei $K(\omega, y) := \mathcal{F}[f(x,y)](\omega)$. Dann ist $f(x,y)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
f(x,y) &:= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, K(\omega,y)\, d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-i\omega x} e^{\omega y}\, d\omega + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-\omega y}\, d\omega \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{\omega(y-ix)}}{y-ix} \Bigg|_{\omega=-\infty}^{\omega=0} + \frac{e^{-\omega(ix+y)}}{-y-ix} \Bigg|_{\omega=0}^{\omega=\infty} \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{y-ix} + \frac{1}{y+ix} \right] = \frac{2y}{2\pi(y^2+x^2)} = \frac{y}{\pi(y^2+x^2)},
\end{aligned}$$

da mit $\omega = \alpha + i\beta$

$$e^{\pm\omega(y-ix)} = e^{\pm(\alpha+i\beta)(y-ix)} = e^{\pm(\alpha y+\beta x)}\, e^{\pm i(\beta y-\alpha x)},$$

$$\lim_{\alpha\to\mp\infty} e^{\pm\omega(y-ix)} = 0$$

gilt.

Lösung 6.2.9 Es sei $\varphi(\omega,y) = \mathcal{F}[u(x,y)](\omega)$, wobei x die Variable und y ein Parameter in Bezug auf $\mathcal{F}$ sei. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right](\omega) &= -i\omega \mathcal{F}[u(x,y)](\omega), \\
\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\right](\omega) &= -\omega^2 \mathcal{F}[u(x,y)](\omega), = -\omega^2 \varphi(\omega,y), \\
\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right](\omega) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, \mathcal{F}[u(x,y)] = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, \varphi(\omega,y),
\end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right](\omega) &= -\omega^2\varphi(\omega,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, \varphi(\omega,y) = 0, \\
\varphi(\omega,0) &= \mathcal{F}[u(x,0)](\omega) = \mathcal{F}[u_0(x)](\omega).
\end{aligned}$$

Dabei nehmen wir an, daß $\mathcal{F}[u_0(x)](\omega)$ existiert.

Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung lautet:

$$\varphi(\omega, y) = A(\omega)e^{\omega y} + B(\omega)e^{-\omega y}.$$

Da $\varphi(\omega, y)$ für große y–Werte beschränkt sein soll, gilt für

$$\operatorname{Re}\omega > 0 : \quad \varphi(\omega, y) = B(\omega)e^{-\omega y}$$

und aus $\varphi(\omega, 0) = \mathcal{F}[u_0(x)](\omega) = B(\omega)$ hat man

$$\operatorname{Re}\omega > 0 : \quad \varphi(\omega, y) = \mathcal{F}[u_0(x)]e^{-\omega y}.$$

Analogerweise gilt

$$\operatorname{Re}\omega < 0 : \quad \varphi(\omega, y) = \mathcal{F}[u_0(x)]e^{\omega y}.$$

Es sei, für $y > 0$, $K(\omega, y) := \begin{cases} e^{-\omega y}, & \operatorname{Re}\omega > 0, \\ e^{\omega y}, & \operatorname{Re}\omega < 0. \end{cases}$

Dann ist $\varphi(\omega, y) = \mathcal{F}[u_0(x)] \cdot K(\omega, y)$. Schließlich,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(x,y)](\omega) = \varphi(\omega, y) &= \mathcal{F}[u_0(x)](\omega)\,\mathcal{F}\left[\frac{y}{\pi(y^2+x^2)}\right](\omega) = \\ &= \mathcal{F}\left[u_0(x) * \frac{y}{\pi(y^2+x^2)}\right](\omega) \ \Rightarrow \\ u(x,y) &= u_0(x) * \frac{y}{\pi(y^2+x^2)} = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi)}{y^2+(x-\xi)^2}\,d\xi. \quad \Box \end{aligned}$$

Lösung 6.2.10 Wir lösen das Dirichlet–Problem,

$$\begin{aligned} &\triangle\Big(u(x,y)\Big) = 0, \\ &u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x < 0, \\ u_0, & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Nach Beispiel 6.2.9 lautet die Lösung

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y u(\xi, 0)}{y^2+(x-\xi)^2}\,d\xi.$$

Wir setzen $u(\xi, 0)$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{u_1 y d\xi}{y^2+(x-\xi)^2} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{u_0 y d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[u_1\left(-\arctan\frac{x-\xi}{y}\bigg|_{-\infty}^{0}\right) + u_0\left(-\arctan\frac{x-\xi}{y}\bigg|_{0}^{\infty}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[u_1\left(-\arctan\frac{x}{y}+\frac{\pi}{2}\right) + u_0\left(\frac{\pi}{2}\arctan\frac{x}{y}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}(u_1+u_0) + \frac{1}{\pi}(u_0-u_1)\arctan\frac{x}{y} = \\
&= \frac{u_0+u_1}{2} + \frac{u_0-u_1}{\pi}\arctan\frac{x}{y}\,,
\end{aligned}$$

vgl. dazu Beispiel 5.7.11.

Literaturverzeichnis

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1970.

[2] F. Ayres Jr., *Theory and Problems of Differential Equations*, Schaum's Outline Series, Schaum Publishing Co., New York, 1952.

[3] H. Behnke, F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[4] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[5] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner, Leipzig, 1983.

[6] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, *Ergänzende Kapitel zum Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner, Leipzig, 1984.

[7] R. V. Churchill, C. W. Brown, R. F. Verhey, *Complex Variables and Applications*, McGraw–Hill, Inc., New York, 1974.

[8] B. Davies, *Integral Transforms and Their Applications*, Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1978.

[9] K. Endl, W. Luh, *Analysis*, Bände 1, 2 und 3, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1975.

[10] G. M. Fichtenholz, *Differential– und Integralrechnung*, Bände 1, 2 und 3, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.

[11] H. Fischer, H. Kaul, *Mathematik für Physiker*, Band 1, B. G. Teubner, Stuttgart, 1988.

[12] M. Fogiel, *The Differential Equations Problem Solver*, Research and Education Association, New York, 1978.

[13] I. S. Gradstein, I. M. Ryshik, *Summen–, Produkt– und Integraltafeln*, Bände 1 und 2, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main, 1981.

[14] S. Großmann, *Mathematischer Einfürungskurs für die Physik*, B. G. Teubner, Stuttgard, 1976.

[15] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[16] J. Heytmanek, *Funktionalanalysis*, Universität Wien, Vorlesung WS 1975/76.

[17] L. Jantscher, *Hilberträume*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1977.

[18] E. Kamke, *Differentialgleichungen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1969.

[19] H. W. Knobloch, F. Kappel, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1974.

[20] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1970.

[21] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Reelle Funktionen und Funktionalanalysis*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.

[22] M. A. Lawrentjew, B. W. Schabat, *Methoden der komplexen Funktionentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.

[23] S. Lipschutz, *Theory and Problems of Complex Variables*, Schaum's Outline Series, McGraw–Hill Book Company, New York, 1964.

[24] J. D. Paliouras, *Complex Variables for Scientists and Engineers*, Macmillan Publishing Co., Inc., London, 1975.

[25] R. Riesz, B. Sz.–Nagy, *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

[26] H. L. Royden, *Real Analysis*, The Macmillan Company, London, 1968.

[27] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw–Hill, Inc., New York, 1966.

[28] F. Rühs, *Funktionentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1983.

[29] R. Sauer, I, Szabó, *Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.

[30] Ch. Schmeiser, *Partielle Differentialgleichungen*, Technische Universität Wien, Vorlesung WS 1986/87.

[31] W. I. Smirnow, *Lehrgang der höheren Mathematik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.

[32] M. R. Spiegel, *Theory and Problems of Laplace Transforms*, Schaum's Outline Series, Schaum Publishing Co., New York, 1965.

[33] M. R. Spiegel, *Fourier–Analysis, Theorie und Anwendung*, Schaum's Outline, McGraw–Hill Book Company GmbH, Düsseldorf, 1976.

[34] W. Stankiewicz, *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1986.

[35] T. Trajdos, *Matematyka dla inżynierów*, Wydawnictwo Naukowo–Techniczne, Warszawa, 1974.

[36] H. Triebel, *Analysis und mathematische Physik*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1984.